S 69628

S 69628

T. 1964.1

Synthese orthogonaler Signalalphabete

Von der
Fakultät für Elektrotechnik
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigte Dissertation

BIBLIOTHEK
DER
TECHN. HOCHSCHULE
AACHEN

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur HANS DIETER LUKE
aus Bielefeld

Referent: Professor Dr.-Ing. V. Aschoff
Korreferent: Professor Dr.-Ing. W. Schüßler
Tag der mündlichen Prüfung: 29. Februar 1964

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Formelzeichen

Einleitung

		Seite
1.	Signalfunktionen in digitalen Nachrichtensystemen	8
1.1	Digitale Nachrichtenübertragung	8
1.2	Der Empfangsprozeß in linearen, digitalen Systemen	13
1.3	Empfangsverfahren	16
1.4	Die Darstellung im Nachrichtenraum	23
1.5	Zusammenfassung	35
2.	In der Literatur bekannte Orthogonalsysteme	36
2.1	Orthogonale Polynome und Funktionen	37
2.2	Orthogonale Signalfunktionssysteme der Nachrichtentechnik	41
2.3	Beispiel: Erzeugung und Empfang Laguerrescher Funktionen	44
2.4	Abschließende Bemerkungen	46
3.	Synthese orthogonaler Signalfunktionssysteme	49
3.1	Signaldarstellung durch bewertete Strukturfunktionen	49
3.2	Die Orthogonalitätsbedingung bewerteter Strukturfunktionen	51
3.3	Synthese orthogonaler Signalalphabete	56
3.4	Abgeschlossenheit und Normierung	83
4.	Vergleichende Untersuchungen an den Orthogonalalphabeten	87
4.1	Nutzungsgrad der Alphabete	87
4.2	Beeinflussung der Übertragung durch additive Störsignale	91
4.3	Einfluß von Synchronisationsfehlern	96
4.4	Modell eines dreidimensionalen Nachrichtenraums	100
5.	Zusammenfassung	

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der Formelzeichen:

a	Konstante, Exponent
$a(t)$	charakteristische Zeitfunktion
$A(p)$	Übertragungsfunktion
b_{ij}	allgemeine i-te Spektralkomponente der Funktion $f_j(t)$
B	'Bandbreite'
c	Konstante
d_{ki}	k-ter Koeffizient der Strukturfunktion $\sigma_i(t)$
E_i	Energieinhalt einer Signalfunktion $s_i(t)$
f	Frequenz
$f_i(t)$	Zeitfunktionen
$F_{jm}(t)$	Linearkombinationen (j) aus m Funktionen eines Systems
g	gleichanteilfrei (Kürzel für Alphabete)
H	Nachrichteninhalt pro Zeichen (bit/Zeichen)
$h(m)$	Hamming-Abstand in Alphabeten des Umfangs m
i, j	Indizes
I	Nachrichtenfluß (bit/sec)
k	Konstante
$K_q(i,j)$	Kreuzproduktsumme q-ter Ordnung zwischen den Strukturfunktionen σ_i und σ_j
l	linear (Kürzel für Alphabete)
m	Umfang eines Alphabets bzw. Funktionssystems
n	Dauer einer Strukturfunktion in τ_0
$n(t)$	additive Störfunktion
n_i	verallgem. Spektralkomponenten der Störfunktion $n(t)$
N	Nutzungsgrad eines Alphabets
N_i	Nachrichtenelemente

$N(P)$	Störvektor mit der Summenhäufigkeit P
p	komplexe Kreisfrequenz
P	Summenhäufigkeit
P_i	Folge von Polynomen
q	Ordnungszahl bei Kreuzproduktsummen
q^+	Ordnungszahl der höchsten noch verschwindenden Kreuzproduktsumme eines Alphabets
q_f	Schranke im Frequenzbereich
Q	mittleres Fehlerquadrat
r	redundant (Kürzel für Alphabete)
R	Redundanz
$R(t)$	Restanteil bei Approximation einer Zeitfunktion
$s_i(t)$	Signalfunktionen
S_i	Signalpunkte im Nachrichtenraum
t	Zeit
t_o	Fußbreite eines Formimpulses
$t_{1,2}$	bestimmte Zeitwerte
T	Dauer einer Taktperiode, Signaldauer
$w(t)$, $w(x)$	Bewertungsfunktion, Belegungsfunktion
W_q	Autokorrelierte der Bewertungsfunktion $w(t)$ für die Verzögerungszeit $q\tau_o$
x	unabhängige Variable
X	Polynom in der Rodriguezschen Formel
z	zyklisch (Kürzel für Alphabete)
α	Exponent
β	Faktor (BP-Alphabete)
$\beta_{ij}(t)$	Korrelationsfunktion zwischen $s_i(t)$ und $s_j(t)$
δ_{ij}	Kroneckersches Symbol
$\delta(t)$	Diracsche Deltafunktion

$\varkappa$	ganze Zahl
$\sigma(t)$	Strukturfunktion (endliche Impulsserie)
τ	Variable im Zeitbereich
τ_o	Zeitquant einer Strukturfunktion
$\varphi_j(t)$	linear unabhängige (orthogonale) Zeitfunktionen
ψ_i	linear unabhängige Funktionen
$\mathcal{L}$	Symbol für Laplace-Transformation

Einleitung

Die Bedeutung digitaler Nachrichtenübertragungssysteme hat mit dem Aufkommen der Datenverarbeitungstechnik erheblich zugenommen. Im Vergleich mit den klassischen Telegraphieverfahren fällt die Forderung nach einer außerordentlich hohen Sicherheit gegen Übertragungsfehler auf, die durch geringe Redundanz der zu übertragenden Daten bedingt ist.

Die gestellten Sicherheitsanforderungen lassen sich z.B. durch Auswerten redundanter Codierungen oder durch Wahl optimal an den gestörten Übertragungskanal angepaßter Signalfunktionen erfüllen.

Die zweite Möglichkeit veranlaßte in letzter Zeit verschiedene Untersuchungen über die Synthese von Signalen. Es bildete sich dabei eine Betrachtungsweise heraus, die, möglichst unabhängig von der realisierenden Schaltungstechnik, Signalfunktionen für bestimmte, vorgegebene Klassen von Übertragungskanälen zu finden sucht.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einigen Problemen dieser Signaltheorie und gibt verschiedene Signalfunktionssysteme (Alphabete) an, die zur Datenübertragung auf linearen, zeitlich invarianten, additiv gestörten Kanälen brauchbar erscheinen.

1. Signalfunktionen in digitalen Nachrichtensystemen

1.1 Digitale Nachrichtenübertragung

1.11 Modellbetrachtungen

Bei der Betrachtung eines nicht speziellen Nachrichtenübertragungssystems geht man zweckmäßig von einem Modell aus, wie es in allgemeiner Form von Shannon [1] angegeben wurde, Abb.1:

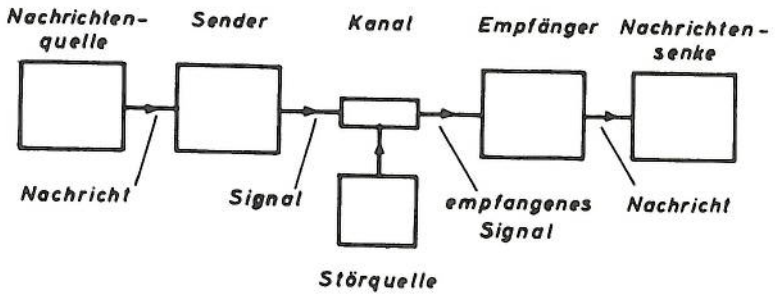


Abb. 1: Allgemeines Modell der Nachrichtenübertragung nach Shannon

Das vorliegende Problem lautet: optimale Übertragung digitaler Nachrichten über zeitinvariante Kanäle durch Wahl geeigneter Signalfunktionen. (Optimal besagt hier, daß die Fehlerwahrscheinlichkeit der Übertragung im Vergleich mit anderen möglichen Systemen minimal wird.) Diese Prämissen spezialisieren das allgemeine Modell in mehreren Punkten:

a) Sender und Empfänger des Shannonschen Modells haben die Aufgabe, Nachrichtenquelle und Senke an den Kanal anzupassen. Neben die hier interessierende Anpassung durch Wahl geeigneter Signalfunktionen tritt als zweiter wesentlicher Aspekt eine energiemäßige Anpassung durch geeignete Verstärker, Schaltmittel, Antennen etc. Derartige Elemente soll das spezialisierte Modell nicht enthalten.

b) Der Übertragungskanal soll zur Klasse der linearen, zeitinvarianten, idealen Bandpaß-Systeme gehören. Mit anderen Worten, vernachlässigbar seien nichtlineare Verzerrungen (im Aussteuerungsbereich), lineare Verzerrungen (im Durchlaßbereich) und multiplikative Störungen. Diese Bedingungen treffen näherungsweise für Drahtverbindungen zu oder können durch Entzerrer, Pegelverstärker etc. angenähert werden.
Im Durchlaßbereich eines derartigen Kanals übertragene Signalfunktionen werden dann nurmehr durch additive Störfunktionen (z.B. Rauschen, Impulse) in ihrer Form verändert.

c) Als weitere Beschränkung soll die Nachrichtenquelle über einen e n d l i c h e n Vorrat unterscheidbarer Nachrichtenelemente verfügen. Entsprechend kann in einem derartigen d i g i t a l e n Übertragungssystem die Zahl der verschiedenen Signalfunktionen (Signalalphabet) des Senders endlich sein (sie muß aber der Zahl der Elemente der Quelle nicht entsprechen).

Mit diesen Voraussetzungen läßt sich folgendes Modell einer digitalen Nachrichtenübertragung angeben (Abb. 2): (vgl. [2], [3]).

Die Quelle erzeugt eine Folge von k verschiedenen Nachrichtenelementen $N_1, N_2 \ldots N_k$. Diese werden im Sendekodierer dem Umfang m des Sendealphabets angepaßt und steuern in festem Takt die Erzeugung der Signalfunktionen $s_1(t), s_2(t) \ldots s_m(t)$. Im Kanal wird zu dem gesendeten Signal $s_j(t)$ das stochastische Störsignal $n(t)$ addiert. Der Empfänger muß die gestörte Signalfunktion $s_j(t) + n(t)$ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit als $s_j(t)$ erkennen und die ursprüngliche Nachricht N_i rekonstruieren.

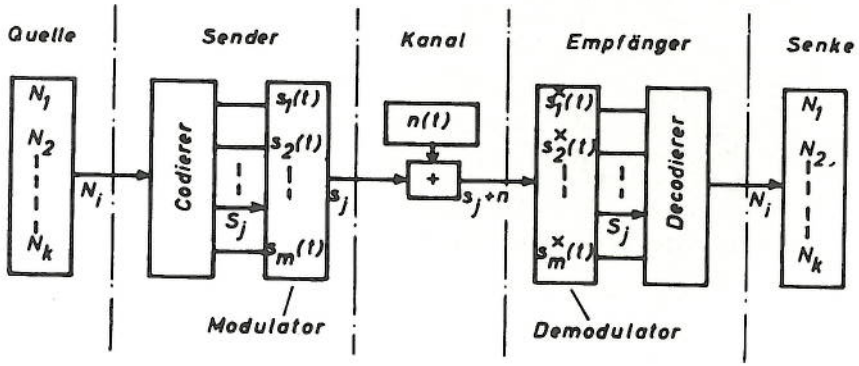


Abb. 2: Modell einer digitalen Nachrichtenübertragung

Für die im weiteren näher betrachteten Signalfunktionen ergeben sich im Sinne dieses Modells bereits einige Forderungen:

1.12 Beschränkungen bei der Auswahl der Signalfunktionen

a) Die Signale sind frequenzmäßig zu beschränken, d.h. außerhalb des Durchlaßbereiches des Kanals soll ein vernachlässigbar kleiner Signalenergieanteil auftreten.

b) Die Signale sind zeitlich zu beschränken, d.h. die während einer Taktperiode der Dauer T des digitalen Systems erzeugte Signalfunktion soll bei Beginn der nächsten Taktperiode bis auf einen vernachlässigbaren Energieanteil abgeklungen sein. Diese Eigenschaft vermindert den Aufwand für den angestrebten Optimalempfang entscheidend, da bei nicht überlappungsfreien (also im eigentlichen Sinn nicht mehr digitalen) Signalen der Optimalempfänger die vor- und nachlaufenden Signalfunktionen in seine Entscheidung einbeziehen muß. Der Aufwand im Empfänger steigt da-

bei nach Lerner [4] exponentiell mit der Länge der berücksichtigten Folge.

c) Der Energieinhalt einer Signalfunktion $E_j = \int_0^T s_j(t)^2\,dt$ ist bei gegebener Taktdauer T durch den Aussteuerungsbereich des Kanals begrenzt. Zur Vergrößerung des Störabstandes soll diese Grenze bei der energiemäßigen Anpassung möglichst gut genutzt werden. Hierzu ist erforderlich, daß alle Signalfunktionen den gleichen Energieinhalt besitzen.

1.13 Lineare und nichtlineare Systeme von Signalfunktionen

Die Anordnung der den m Signalfunktionen des Systems der Abb. 2 zugeordneten Sende- und Empfangsschaltungen läßt sich mit dem Aufbau eines Multiplexsystems mit m Kanälen vergleichen [2].
In einer Systematik der Multiplexverfahren unterscheidet Zadeh [5] zwischen den zwei Hauptklassen der linearen und der nichtlinearen Multiplex-Systeme. Wesentliches Unterscheidungsmerkmal ist, ob die Kanalfilter des Empfängers linear oder nichtlinear sind.
Nichtlineare Systeme (z.B. Amplituden-, Leistungsvielfache) ermöglichen es, in einem gegebenen Frequenzband beliebig viele Teilkanäle unterzubringen. Da aber mit steigender Zahl der Teilkanäle der Störabstand schlechter wird, sind nichtlineare Vielfache nur auf störarmen Kanälen sinnvoll. Mit linearen Systemen (Frequenz-, Zeitvielfache) läßt sich nur eine bestimmte Höchstzahl an Teilkanälen gegebener Informationskapazität übertragen, dafür können alle Signalfunktionen die Forderung nach gleichem Energieinhalt erfüllen.

Geht man auf das vorliegende Problem zurück, so erscheinen lineare Signalalphabete, gekennzeichnet dadurch, daß die zugehörigen Empfangsfilter linear sind, als günstiger. Ausgenommen ist die Übertragung auf extrem störarmen Kanälen.

Anmerkung:

Die Funktionen $f_1 \ldots f_m$ werden als linear, genauer linear unabhängig bezeichnet, wenn die Beziehung $k_1 f_1 + \ldots + k_m f_m = 0$ für $k_i \neq 0$ keine für alle Argumente gültige Lösung hat. Kriterien hierfür sind das Nichtverschwinden der Wronskischen [6] oder Gramschen [7] Determinante.

1.14 Zum Umfang der Signalalphabete

Der Empfänger eines linearen digitalen Übertragungssystems hat also als Eingang einen Satz von m linearen Filtern. Wird vom Sender in einer der Taktperioden T die Signalfunktion $s_j(t)$ gegeben, so soll am Ende dieser Periode im Empfänger nur am Ausgang des zugeordneten Empfangsfilters ein Signal erscheinen.
Bei additiven Störungen im Kanal wird aber an a l l e n Ausgängen eine stochastische Störgröße auftreten. Die Aufgabe des Empfängers besteht dann darin zu entscheiden, welche der Signalfunktionen in einem Zeitabschnitt am wahrscheinlichsten gesendet wurde. Diese Operation erfolgt in einer den Empfangsfiltern nachgeschalteten Entscheidungsstufe. Ein Signalfunktionssystem hat dann die geringste Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn am Ende jedes digitalen Zeitabschnitts der für die Entscheidung maßgebende Energieunterschied zwischen Signal und Störung maximal wird. Ist der Aussteuerungsbereich des Kanals bereits voll genutzt, so ist eine weitere Erhöhung der Signalenergie nur durch Verlängerung der Signalfunktionen (und entsprechend der Taktperiode) möglich. Da aber der Informationsfluß sich nicht verringern soll, muß die Zahl m der verfügbaren, verschiedenen Signalfunktionen entsprechend erhöht werden. Ein optimales System erfordert also ein Signalalphabet großen Umfangs [8], [9], [10].

Leider wächst aber die den Energieunterschied gegenüber additiven Störungen bestimmende Signaldauer bei konstantem Informationsfluß nur logarithmisch mit dem Umfang des Alphabets. Soll der Aufwand in normalen Grenzen bleiben, so wird man m

nicht größer als 10 ... 100 wählen [4], [9].

Ein weiterer Grund, der in manchen Systemen gegen zu umfangreiche Alphabete spricht, ist eine Verzögerung der Übertragung, da eine Signalfunktion erst gesendet werden kann, wenn ld m binäre Elementarsignale vom Codierer zusammengefaßt worden sind.

1.2 Der Empfangsprozeß in linearen digitalen Systemen

Der Empfangsprozeß in den Übertragungssystemen der Nachrichtentechnik kann allgemein als Analysevorgang in folgendem Sinn beschrieben werden:
ein Empfänger ist eine Anordnung, welche die eintreffende Zeitfunktion nach einem gespeicherten System von Funktionen zerlegt und auf diese Art die in der Eingangsfunktion enthaltene Information als Kennwertmuster (Amplituden, Argumente) bezüglich des empfängereigenen Systems darstellt.

Im einfachsten und wohl auch ausschließlich üblichen Fall sind die Funktionssysteme, aus denen der Sender die Signale bildet und nach denen der Empfänger analysiert, die gleichen. Andere Möglichkeiten wären aber denkbar.
In analogen Übertragungssystemen wird das empfangene Kennwertmuster in seiner gestörten Form weitergegeben. In digitalen Systemen kann dagegen in einer zweiten Stufe dieses verfälschte Muster mit der e n d l i c h e n Anzahl der ungestörten Muster verglichen und so eine Entscheidung nach größter Ähnlichkeit oder Wahrscheinlichkeit getroffen werden.

Im folgenden soll der Empfangsvorgang näher betrachtet werden, um weitere Hinweise für die optimale Gestaltung der Signalfunktionen zu finden.
Die Analyse der additiv gestörten Signalfunktion entspricht mathematisch der Approximation einer empirischen Funktion durch eine Linearkombination aus den Elementen eines geeigneten Funktionssystems.

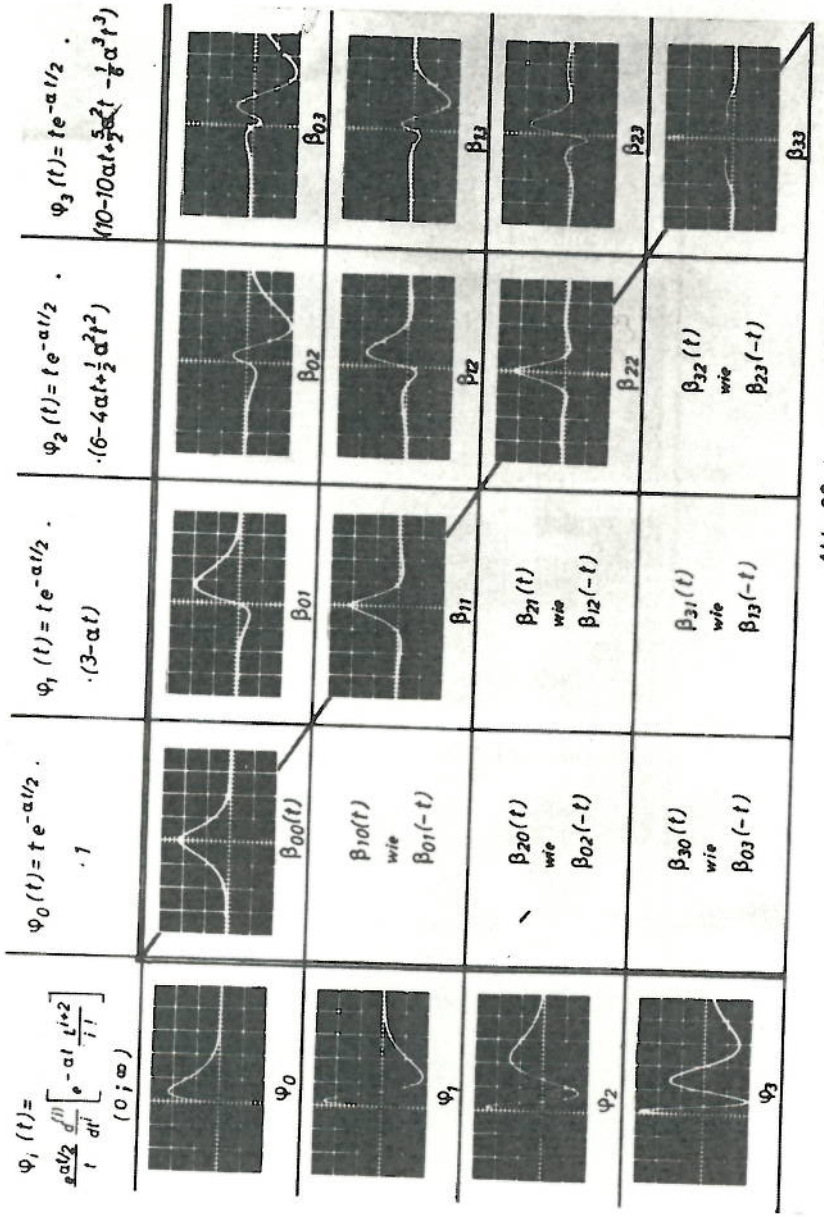


Abb. 28: Laguerresche Funktionen (a=2)

ner Berechtigung, da bei Aussendung jeweils nur 'Einer aus m'-Funktionen der zur Verfügung stehende Zeit- bzw. Frequenzbereich schlecht ausgenutzt wird.
Eine Ausnahme bilden die bewerteten und beschränkten Sinusfunktionen der Abb. 24, die im Zeit- und Frequenzbereich den verfügbaren Raum gut nutzen.
Werden derartige Funktionen als Träger in einem Vielfach eingesetzt, so könnte man von Formmultiplex sprechen [35].

Über ein neuartiges Verfahren zur Synthese von Signalalphabeten, die allen Forderungen nach 1.42 genügen, soll im nächsten Kapitel berichtet werden.

3. Synthese orthogonaler Signalfunktionssysteme

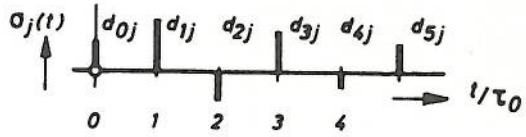
3.1 Signaldarstellung durch bewertete Strukturfunktionen

Zur Synthese optimaler Signalalphabete ist zunächst eine geeignete Darstellung der Signalfunktionen in mathematisch einfacher Form erwünscht. Diese Darstellung soll einmal die für die Übertragung wesentlichen Eigenschaften charakterisieren und zum anderen eine günstige Beschreibung der Orthogonalität eines Systems ermöglichen.
Zur Vereinfachung der Synthese von Signalalphabeten ist es außerdem nützlich, wenn beide Merkmale so weit wie möglich unabhängig voneinander beschrieben werden können.
Eine Möglichkeit, diesen Forderungen recht gut zu genügen, ist die Darstellung eines Alphabets durch die Faltungsprodukte einer gemeinsamen Bewertungsfunktion mit einer Folge die einzelnen Signale charakterisierender Impulsserien.
Diese Impulsserien werden im folgenden als Strukturfunktionen $\sigma(t)$ bezeichnet.
Abb. 29 zeigt das Prinzip dieser Darstellung und gibt die Realisierung der Strukturfunktionen durch ein erweitertes Laufzeitkettenfilter an.

Für die Strukturfunktionen $\sigma_j(t)$ soll gelten

$$\sigma_j(t) = \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}\,\delta(t - k\tau_o) \qquad (3/1)$$

z.B.



($\delta(t)$ sei die Diracsche Deltafunktion)

Die Signalfunktion $s_j(t)$ entsteht durch Faltung mit der gemeinsamen Bewertungsfunktion $w(t)$:

$$s_j(t) = w(t) * \sigma_j(t)$$

$$= w(t) * \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}\,\delta(t-k\tau_o)$$

mit $w(t) * \delta(t-k\tau_o) = w(t-k\tau_o)$

erhält man

$$s_j(t) = \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj} \cdot w(t-k\tau_o) \qquad (3/2)$$

Die Signalfunktionen werden mit anderen Worten als Linearkombinationen des Funktionssystems $w(t - k\tau_o)$ für $k = 0, 1, \ldots (n-1)$ beschrieben.

Die Orthogonalität eines derartigen Signalalphabets ist von der Form der Strukturfunktionen ebenso wie von der Bewertungsfunktion abhängig. Um übersichtliche Lösungen zu finden, wird im folgenden Orthogonalität der Strukturfunktionen vorausgesetzt und der störende Einfluß der Bewertungsfunktion durch eine zusätzliche Forderung an die Strukturfunktionen eliminiert.

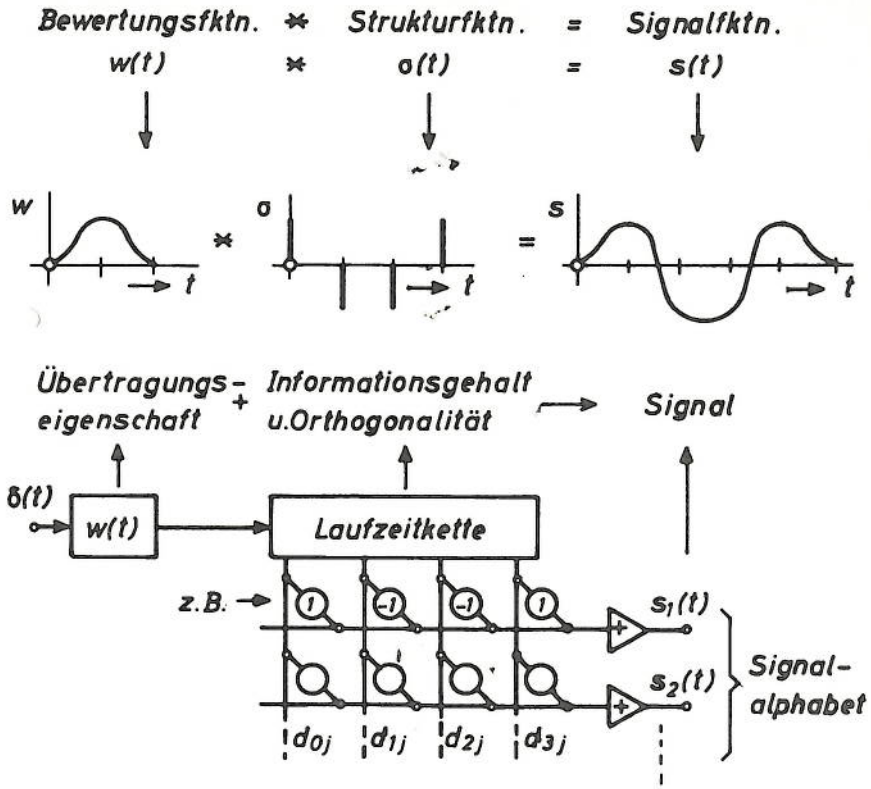


Abb. 29: Signaldarstellung durch bewertete Strukturfunktionen

3.2 Die Orthogonalitätsbedingung bewerteter Strukturfunktionen

Gegeben seien zwei orthogonale Strukturfunktionen $\sigma_i(t)$ und $\sigma_j(t)$. Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i(t) \cdot \sigma_j(t)\, dt = \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, d_{kj} = 0 \qquad (3/3)$$

vgl. Abb. 30 als Beispiel:

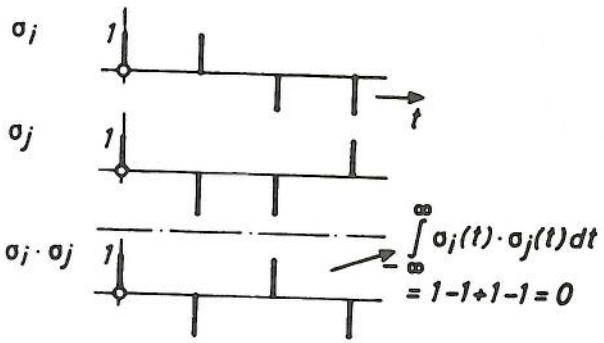


Abb. 30: Orthogonalität zweier Strukturfunktionen

Die aus orthogonalen Strukturfunktionen durch Faltung mit einer Bewertungsfunktion w(t) gebildeten Signalfunktionen sind aber nun im allgemeinen nicht mehr orthogonal.

Die Orthogonalitätsbedingung für die Funktionen

$$s_i(t) = \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, w(t - k\tau_o)$$

und $s_j(t) = \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}\, w(t - k\tau_o)$ lautet $(i \neq j)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, w(t-k\tau_o) \cdot \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}\, w(t - k\tau_o)\, dt \overset{!}{=} 0 \qquad (3/4)$$

Aus der Orthogonalität der Strukturfunktionen allein folgt aber nur

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, w(t - k\tau_o) \cdot d_{kj}\, w(t - k\tau_o)\, dt \overset{!}{\neq} 0 \qquad (3/5)$$

Als Beispiel möge diese Abb. 31 erläutern:

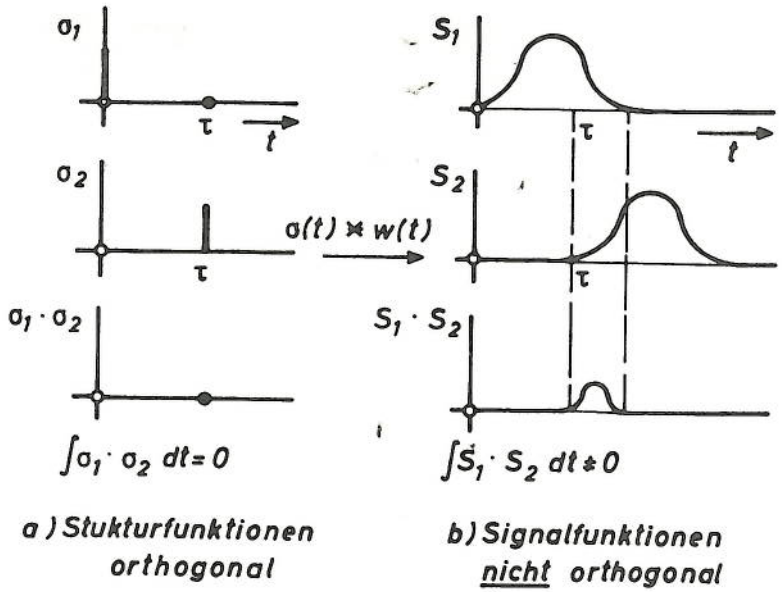


Abb. 31: Beispiel zur Orthogonalität bewerteter Strukturfunktionen

Zu der Orthogonalitätsrelation der Strukturfunktionen tritt eine Zusatzbedingung, die sich durch Gleichsetzen von (3/4) und (3/5) ergibt. Führt man zur Vereinfachung der Schreibweise die Abkürzung

$$w(t - k\tau_o) = w_k \qquad \text{ein,}$$

so lautet diese Zusatzbedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, w_k \cdot \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}\, w_k \, dt \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, d_{kj}\, w_k^{\,2}\, dt \qquad (3/6)$$

Durch Ausschreiben der Doppelsumme auf der linken Seite der Gleichung (3/6) ergibt sich

$$\begin{array}{l}
\underline{d_{oi}\, d_{oj}\, w_o^2} + d_{oi}\, d_{1j}\, w_o\, w_1 + --- + d_{oi}\, d_{\langle n-1\rangle j}\, w_o\, w_{\langle n-1\rangle} \\
+ d_{1i}\, d_{oj}\, w_1\, w_o + \underline{d_{1i}\, d_{1j}\, w_1^2} + --- \\
\\
+ d_{\langle n-1\rangle i}\, d_{oj}\, w_{\langle n-1\rangle}\, w_o + --- \quad --- + \underline{d_{\langle n-1\rangle i}\, d_{\langle n-1\rangle j}\, w_{\langle n-1\rangle}^2}
\end{array}$$

Wie man sieht, entspricht die Summe der Terme in der Hauptdiagonalen (unterstrichen) genau der rechten Seite von Gleichung (3/6). Mit anderen Worten: das Integral über die Summe aller Terme außerhalb der Hauptdiagonalen stört die Orthogonalität und muß verschwinden. Die Zusatzbedingung lautet demnach:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=o}^{n-1} \sum_{k'=o}^{n-1} d_{ki}\, d_{k'j}\, w_k\, w_{k'}\, dt \overset{!}{=} 0 \qquad (3/7)$$
$$(k \neq k')$$

durch Ausklammern der festen Koeffizienten aus dem Integral folgt Gleichung (3/8)

$$\sum_{k=o}^{n-1} \sum_{k'=o}^{n-1} \left(d_{ki}\, d_{k'j} \int_{-\infty}^{\infty} w_k\, w_{k'}\, dt\right) \overset{!}{=} 0 \qquad (3/8)$$
$$(k \neq k') \qquad \text{für alle } i,j \quad (i \neq j)$$

das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} w_k\, w_{k'}\, dt$ ist die Autokorrelierte der Funktion $w(t)$ für die Verzögerungszeit $(k' - k)\tau_o = q\tau_o$, es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_k\, w_{k'}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} w_k\, w_{k+q}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \cdot w(t - q\tau_o)\, dt = W_q \quad (\text{für } q = k' - k) \qquad (3/9)$$

Da nun die W_q je nach Wahl von $w(t)$ und τ_o beliebig verschieden sein können, muß dafür gesorgt werden, daß sich jeweils d i e Termsummen mit gleichem $q = k' - k$ aufheben, für die $W_q \neq 0$ ist.

Im folgenden werden diese Termsummen mit $k' - k = \text{const} = q$ als Kreuzproduktsummen q-ter Ordnung bezeichnet, eine Benennung, deren Berechtigung Abb. 32 zeigen soll. Dargestellt sind jeweils zwei Strukturfunktionen $n = 4$, zwischen denen gestrichelte Verbindungen die jeweils kreuzförmig zu bildenden Produkte andeuten:

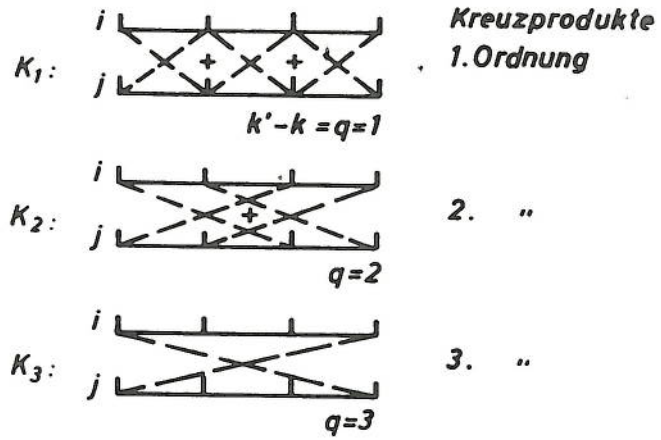


Abb. 32: Schema der Berechnung der Kreuzproduktsummen q-ter Ordnung

Mit dem Ausdruck für die Kreuzproduktsummen

$$K_q(i,j) = \sum_{k=o}^{n-q} (d_{ki}\, d_{k'j} + d_{k'i}\, d_{kj}) \qquad (3/10)$$

$$(k' = k+q) \qquad (q = 1,2...)$$

ergibt sich jetzt die endgültige Formulierung der Bedingung, unter deren Voraussetzung aus orthogonalen Strukturfunktionen orthogonale Signalalphabete hergeleitet werden können:

$$\sum_{q=1}^{n-1} K_q(i,j) \cdot W_q \overset{!}{=} 0 \qquad \text{für alle } i,j\ (i \neq j) \qquad (3/11)$$

3.3 Synthese orthogonaler Signalalphabete

Es wurde gezeigt, daß die Ableitung orthogonaler Signalalphabete auf eine Synthese orthogonaler Strukturfunktionen zurückgeführt werden kann, wenn der Einfluß der gemeinsamen Bewertungsfunktion durch Erfüllung der Zusatzbedingung (3/11) berücksichtigt wird.
Zur Erfüllung eben dieser Bedingung gibt es grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, die auf jeweils andere Klassen von Alphabeten führen:

3.31 Systeme mit orthogonalen Bewertungsfunktionen

Die Vorschrift $W_q = 0$ für $q = 1,2...$ erfüllt die Zusatzbedingung (3/11). $W_q = 0$ besagt nach Gleichung (3/9), daß das System der zeitverschobenen Bewertungsfunktionen $w_k = w(t - k\tau_o)$ mit $k = 0,1,2...$ ein Orthogonalsystem ist. Bewertungsfunktionen mit dieser Eigenschaft sind z.B. die si-Funktionen $w_k = \mathrm{si}\,\frac{\pi}{\tau_o}(t - k\tau_o)$ oder beliebige, aber zeitlich auf eine Fußbreite $t_o \leq \tau_o$ begrenzte (d.h. impulsförmige) Funktionen. In diesen Fällen kann $K_q(i,j)$ beliebig sein, die

Strukturfunktionen müssen nur die Orthogonalitätsbedingung erfüllen.

Anmerkung:

Im Sonderfall der Bewertung mit der si-Funktion entspricht die Strukturfunktion der im Sinne des Abtasttheorems gebildeten Abtastfunktion des Signals [36], [37]. In Umkehrung dieser Aussage folgt, daß die Abtastfunktionen orthogonaler Funktionen ebenfalls orthogonal sind.

Zur Konstruktion von Strukturfunktionen, die nur der Orthogonalitätsrelation $\sum_{k=o}^{n-1} d_{ki}\, d_{kj} = 0$ genügen müssen, läßt sich ein einfaches Verfahren angeben. Man geht aus von einem beliebigen Paar orthogonaler Strukturfunktionen σ_1, σ_2 und leitet daraus durch Anwendung zweier Verdopplungsregeln sukzessiv beliebig umfangreiche Orthogonalsysteme ab.

Die zwei möglichen Verdopplungsregeln, die in freier Reihenfolge nacheinander angewendet werden können, lauten:

1. Lineares Doppeln:

   Hänge an eine gegebene Strukturfunktion noch einmal dieselbe an, und zwar zum ersten mit gleichem, zum zweiten mit umgekehrtem Vorzeichen.
   Schema:

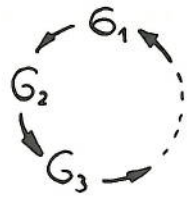
$$\begin{array}{ll} \sigma_1\ ,\ \sigma_1 & \\ \sigma_1\ ,\ -\sigma_1 & \sigma_1 \\ & \downarrow \\ \sigma_2\ ,\ \sigma_2 & \sigma_2 \\ & \downarrow \\ \sigma_2\ ,\ -\sigma_2 & \sigma_3 \end{array}$$

2. Zyklisches Doppeln:

   Vertausche bei der Paarbildung die gegebenen Strukturfunktionen zyklisch und füge die jeweils folgende Funktion einmal mit gleichem und zum zweiten mit umgekehrtem Vorzeichen an.

Schema:

$$\begin{array}{l} \sigma_1,\ \sigma_2 \\ \sigma_1,\ -\sigma_2 \\ \sigma_2,\ \sigma_3 \\ \sigma_2,\ -\sigma_3 \\ \sigma_3,\ \sigma_1 \\ \sigma_3,\ -\sigma_1 \end{array}$$



Beide Regeln werden in Abb. 33 zur Ableitung einer Familie orthogonaler Strukturfunktionssysteme benutzt. Die Alphabete sind mit Kurzzeichen versehen, die ihre Herkunft bezeichnen, z.B. 'llz' besagt, daß diese $2^3 = 8$ Strukturfunktionen durch sukzessives Anwenden zweimal der linearen und einmal der zyklischen Verdopplungsregel aus dem Grundpaar entstanden sind.

Wählt man für die Alphabete der Abb. 33 den Rechteckimpuls der Länge τ_0 als Bewertungsfunktion, dann erhält man eine Familie orthogonaler Sprungfunktionssysteme, deren spezielle Mitglieder 'lll...' mit den "Walshschen Funktionen" identisch sind (vgl. Abb. 21).

Anmerkung:

Die Strukturfunktionen der Abb. 33 lassen sich als orthogonale Binärcodes auffassen. Der Hamming Abstand h(m) zwischen zwei beliebigen Funktionen eines solchen Alphabets ist stets gleich $h(m) = \frac{m}{2}$. Die zugeordneten Signalpunkte des Shannonschen Coderaumes liegen also regelmäßig angeordnet auf der Oberfläche einer m-dimensionalen Kugel, die Signalvektoren stehen senkrecht aufeinander. Derartige Alphabete gehören zu der von Gilbert [40] definierten Klasse der "minimizing alphabets", die sich durch maximale Sicherheit gegenüber additivem weißen Gaußschen Rauschen auszeichnen.

Der mit $\frac{m}{2}$ wachsende Hamming-Abstand der Orthogonalcodes wird mit einer steigenden Redundanz R der Alphabete erkauft; es gilt

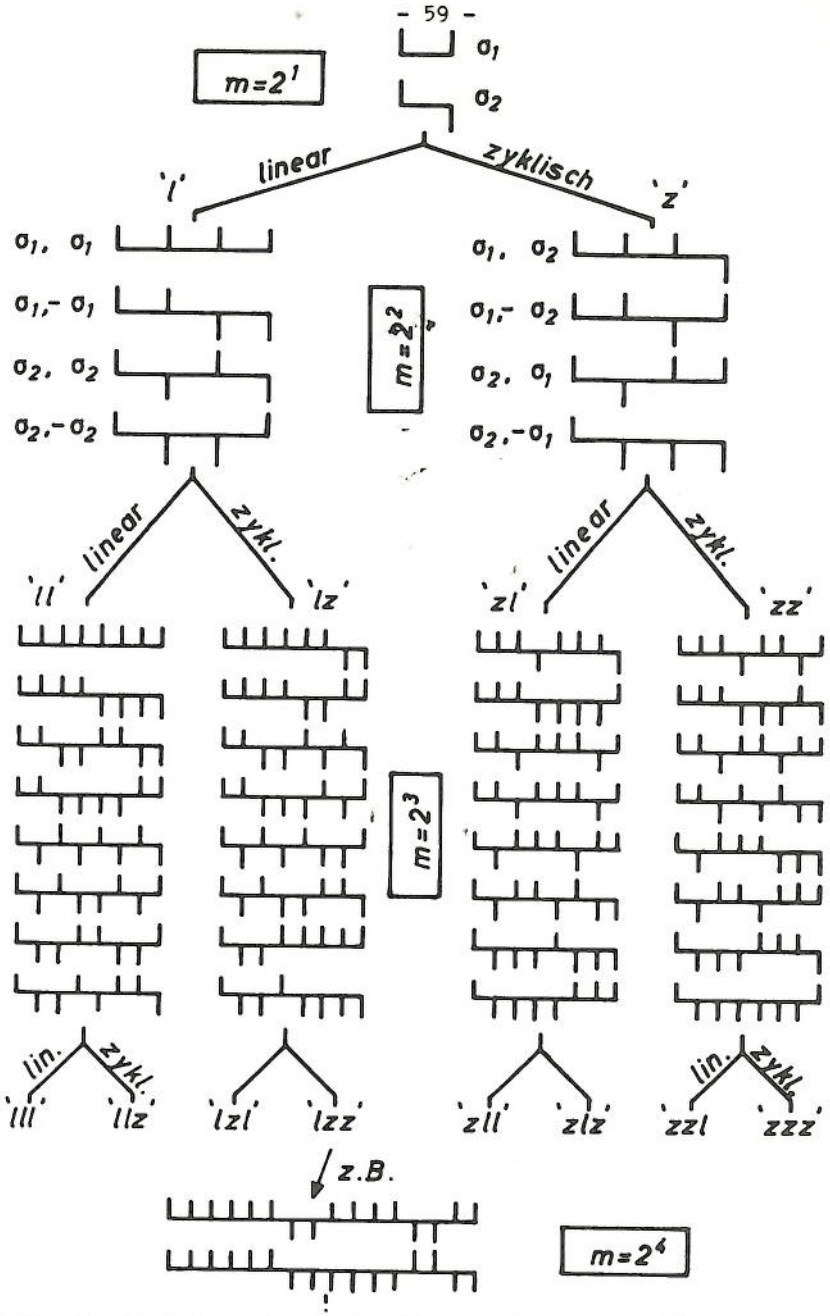


Abb. 33: Familie orthogonaler Strukturfunktionen (I)

$$R = \frac{H_{bin} - H_{orth}}{H_{bin}} = \frac{m - ld\ m}{m} = 1 - \frac{ld\ m}{m}$$

Ein weiteres Beispiel eines Funktionspaares, welches in eine ähnliche Familie entwickelt werden kann, sei in Abb. 34 dargestellt.

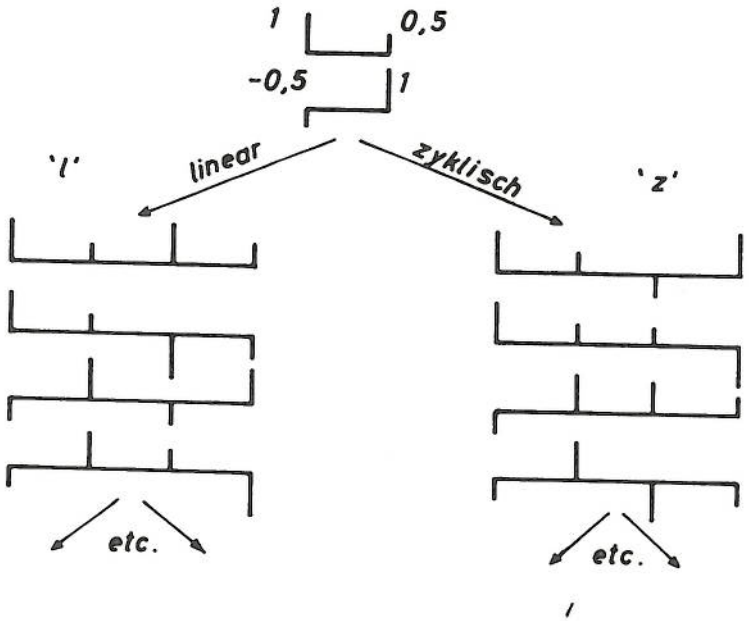


Abb. 34: Familie orthogonaler Strukturfunktionen (II)

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch Signalfunktionen und Schema des Matched Filter-Empfangs zweier nach diesem Schema synthetisierter Alphabete an Hand von Oszillogrammen gezeigt werden. Die Abb. 35 zeigt das Alphabet 'z' (nach Abb. 33), bewertet mit der si-Funktion passenden Arguments. Wie schon in 2.3 sind die Ausgangskombinationen des Demodulators in Matrixform angeordnet. Alle Stellen außerhalb der Haupt-

diagonalen (i = j) zeigen im Abtastzeitpunkt die Null. Als Signalalphabet sind diese Funktionen kaum geeignet, da die si-Funktion zeitlich schlecht beschränkt ist.

Die zweite Lösung der Vorschrift $W_q = 0$ verlangt auf eine Fußbreite τ_0 beschränkte, also impulsförmige, aber sonst beliebige Bewertungsfunktionen.

Zusammen mit den Forderungen an optimale Signalfunktionen (s. 2.4) stellen sich für w(t) folgende Bedingungen:

1. Die impulsförmige Bewertungsfunktion soll außer im Zeitbereich auch im Frequenzbereich beschränkt sein, z.B. im Sinne von [31] (energiemäßige Definition der Schranken) oder [38] (amplitudenmäßige Definition).

2. Die Bewertungsfunktion soll symmetrisch oder schiefsymmetrisch sein, da dann die Matched Filter des Empfängers sich nur durch die umgekehrte Reihenfolge der Abgriffe an der Laufzeitkette von den Sendefiltern unterscheiden.

Als Bewertungsfilter wurden nach diesen Gesichtspunkten die in [39] von Jess und Schüßler angegebenen "Impulsformfilter mit günstigem Einschwingverhalten" ausgewählt. Die vorhandene geringe Unsymmetrie dieser Formimpulse stört den Empfang nicht merkbar. Abb. 36 zeigt ein mit diesen Impulsen (Filter 52.10:D) bewertetes Signalalphabet einschließlich seiner Korrelationsfunktionen.

3.32 Systeme mit nicht orthogonalen Bewertungsfunktionen

Strukturfunktionssysteme mit der Eigenschaft, daß in ihnen sämtliche Kreuzproduktsummen verschwinden (also $K_q(i,j) = 0$ für q = 1,2 ... (n-1) können mit beliebigen Funktionen bewertet werden, ohne daß ihre Orthogonalität gestört wird. Diese Eigenschaft erfüllen aber nur jeweils einzelne Funktionspaare, die aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Strukturfunktion bestehen (die Faltung einer

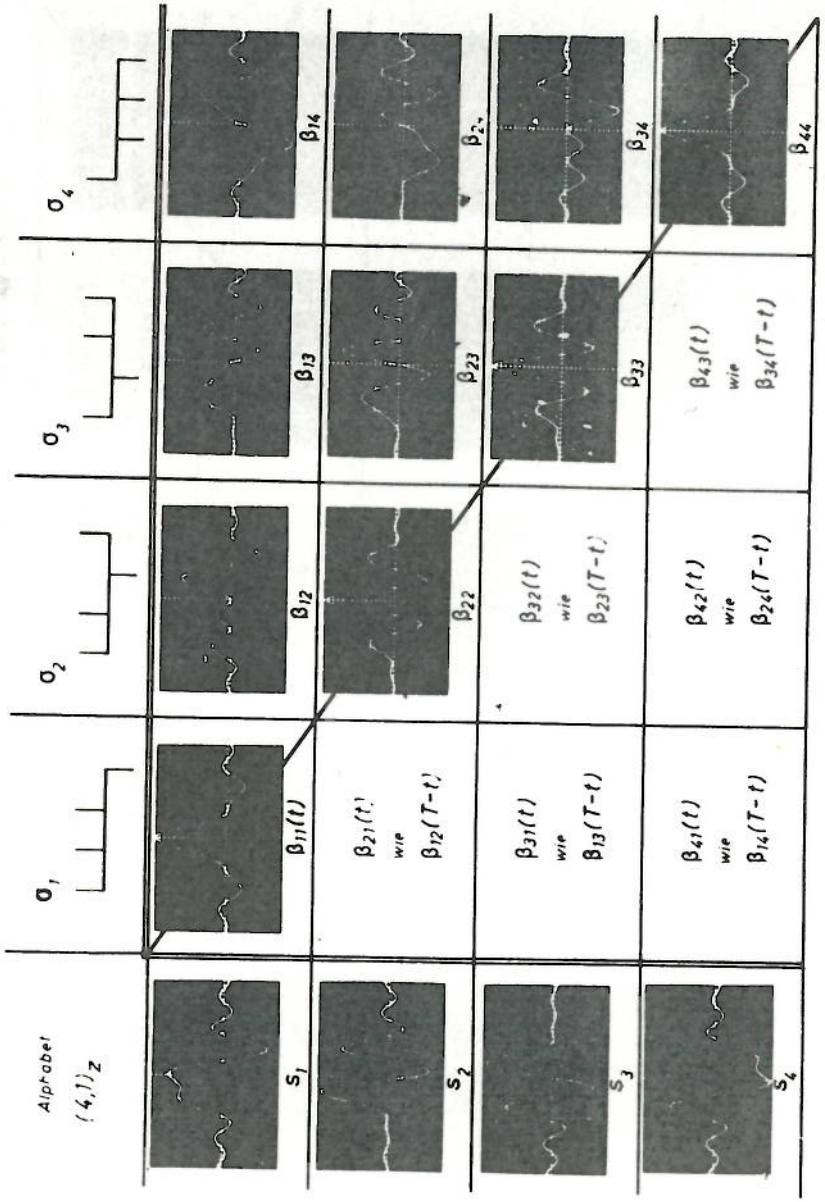


Abb. 35: Alphabet(4,1)z (belegt mit si-Funktion)

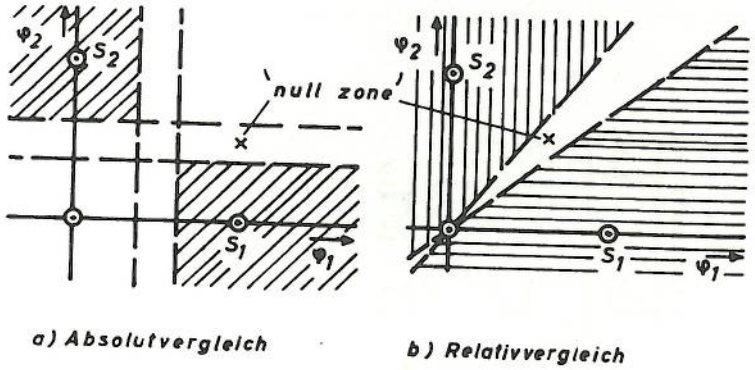


Abb. 15: 'null zone'-Entscheidung

nalen Hyperkugel um S_j. Abb. 16 zeigt dies wieder für den zweidimensionalen Fall

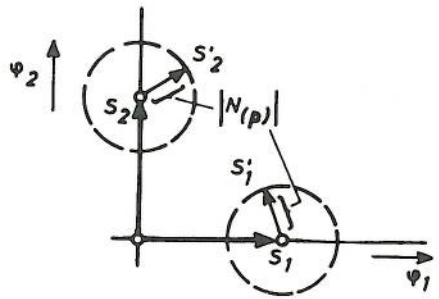


Abb. 16: Streukugeln im Nachrichtenraum

Die Fehlerwahrscheinlichkeit in der Entscheidungsstufe ist offensichtlich umso geringer, je weiter diese "Streukugeln"

voneinander entfernt liegen, d.h. je größer die Signalvektoren bei konstanter Größe der Störvektoren sind. Nach der Parsevalschen Gleichung

$$E_j = \int_{t_1}^{t_1+T} \varphi_j^2(t)\, dt = \sum_{i=o}^{\infty} b_{ij}^2 = b_{jj}^2 \qquad (1/14)$$

wächst nun der Betrag der Signalvektoren $\{b_{jj}\}$ mit der Wurzel aus dem Energieinhalt E_j der Signalfunktionen. Man muß also, wie schon in 1.14 gefordert, einmal die Aussteuerungsgrenze des Kanals voll nutzen und zum zweiten die Länge der Signalfunktionen möglichst erhöhen. Wie ebenfalls schon gesagt, muß in diesem Fall zum Ausgleich der dann kleineren Zahl in der Zeiteinheit übertragener Signale der Umfang des Alphabets erhöht werden.

Kennzeichnet man die energiemäßige Beschränkung im Nachrichtenraum durch eine entsprechende Kugel um den Ursprung, dann zeigt Abb. 17, daß es zunächst günstig ist, auch die negativen Signalfunktionen mit in das Alphabet einzubeziehen.

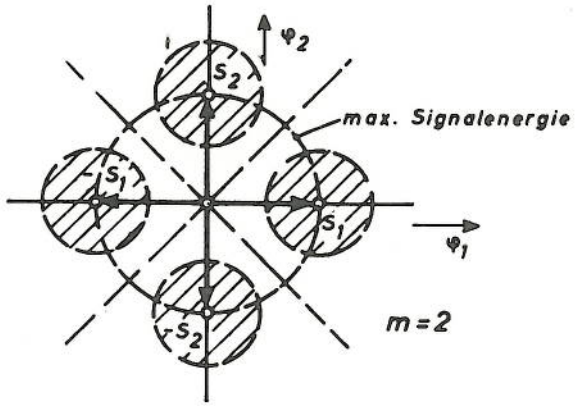


Abb. 17: Optimale Ausnutzung des zweidimensionalen Nachrichtenraumes

Soll der Mindestabstand der Streukugeln beibehalten werden, dann ist eine weitere Vergrößerung des Alphabets nur durch eine Erweiterung der Dimensionen möglich, d.h. die Zahl der orthogonalen Funktionen muß erhöht werden. Abb. 18 zeigt die optimale äquidistante Anordnung der Streukugeln auf der Aussteuerungskugel bei Verwendung orthogonaler Signalalphabete für den Fall m = 3.

In dieser Darstellungsart läßt sich nun auch leicht zeigen, daß die Streubereiche bei einer nichtorthogonalen Erweiterung des zweidimensionalen Systems nicht optimal verteilt werden können s.Abb. 19.

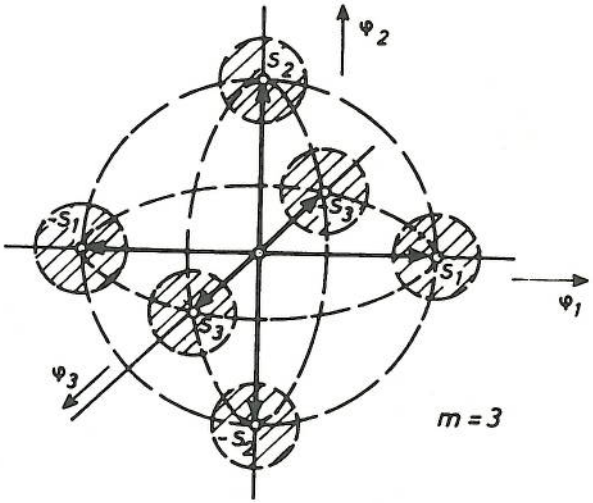
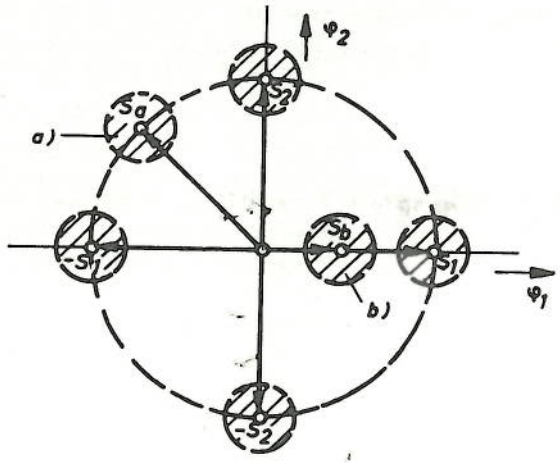


Abb. 18: Optimale Ausnutzung des dreidimensionalen Nachrichtenraumes



a) lineare, nichtorthogonale Erweiterung $S_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2 - S_1)$

b) nichtlineare " $S_b = 0{,}5\, S_1$

Abb. 19: Nicht optimale Ausnutzung des Nachrichtenraumes

1.5 Zusammenfassung

Zur Lösung des gestellten Problems "Optimale Signalfunktionen für digitale Nachrichtensysteme" wurden bisher verschiedene Annahmen gemacht und daraus Forderungen abgeleitet. Es folgt eine Zusammenstellung:

1.51 Annahmen

1. Die Nachrichtenquelle ist digital, d.h. sie verfügt über einen beschränkten Vorrat an Nachrichtenelementen.

2. Der Übertragungskanal gehört zur Klasse der linearen zeitinvarianten Systeme mit idealem Bandpaß- bzw. Tiefpaß-Charakter.

3. Die Aussteuerungsgrenze des Kanals ist endlich.

4. Der Kanal ist additiv gestört.

5. Sender und Empfänger sind phasenstarr synchronisiert.

1.52 Resultierende Forderungen an die Signalfunktionen

1. Eine Signalfunktion soll im Zeit-, Frequenz- und Amplitudenbereich außerhalb bestimmter fester Schranken nur vernachlässigbar kleine Energieanteile besitzen.

2. Die Schranken nach 1. sollen für alle Signale eines Alphabets gleich sein.

3. Die Signalfunktionen sollen ein lineares, orthogonales System bilden.

4. Der Umfang des Alphabets soll groß sein.

5. Die Netzwerke für Erzeugung und Empfang der Signalfunktionen sollen einfach zu realisieren sein.

2. In der Literatur bekannte Orthogonalsysteme

Orthogonale Funktionssysteme spielen z.B. in der Reihenlehre und der Theorie der Differential- und Integralgleichungen eine gewichtige Rolle. Einige dieser Systeme haben in die theoretische Elektrotechnik Eingang gefunden (z.B. in Synthese und Analyse linearer Netzwerke). Eine dominierende Rolle spielt auf Grund besonderer Eigenschaften die Klasse der Sinusfunktionen, daneben sind in Sonderfällen Laguerresche, Legendresche und Jacobische Polynome, Systeme orthogonaler Rechteckfunktionen oder orthogonaler Exponentialfunktionen gebräuchlich [23], [24], [25], [43].

Grundsätzlich sind alle diese Funktionssysteme als Signalalphabete denkbar. Praktisch sind dagegen bisher Signalfunktionen nur aus den Klassen der Sinus- und Rechteckfunktionen abgeleitet worden. Über Versuche mit bewerteten Orthogonalpolynomen als Nachrichtenträger wird m.W. nur an einer Stelle der Literatur berichtet [26].

Im folgenden soll ein knapp gehaltener Überblick gegeben werden.

2.1 Orthogonale Polynome und Funktionen

Orthogonale Funktionssysteme ergeben sich z.B. als Eigenfunktionen in Eigenwertproblemen; darüber hinaus läßt sich aber jedes linear unabhängige Funktionssystem orthogonalisieren. Ein einfaches Verfahren hierzu stammt von E. Schmitt [19]: "Es sei $\psi_i(x)$ eine Folge linear unabhängiger, stetiger Funktionen in einem Intervall $(x_1; x_2)$ der reellen Achse. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\varphi_i(x)$, dessen Funktionen sich als lineare Kombinationen der $\psi_i(x)$ schreiben lassen":

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= c_{11}\psi_1(x) \\
\varphi_2(x) &= c_{21}\psi_1(x) + c_{22}\psi_2(x) \\
\varphi_3(x) &= c_{31}\psi_1(x) + c_{32}\psi_2(x) + c_{33}\psi_3(x) \\
&\;\;\vdots
\end{aligned} \tag{2/1}$$

Mit diesem Ansatz erhält man aus der Orthogonalitätsbedingung die Koeffizienten zu:

$$c_{ij} = -\frac{(\psi_i\,\varphi_j)}{(\psi_i\,\psi_i)} \quad (i \geq j) \tag{2/2}$$

Beispiel: Durch Orthonormieren des Systems der Polynome $1; x; x^2; x^3 \ldots$ gewinnt man die Legendresche Polynome

$$P_o = 1$$
$$P_1 = x$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x) \text{ usw.}$$

In Erweiterung der bisher benutzten Orthogonalitätsbedingung kann man eine B e w e r t u n g s f u n k t i o n $w(x)$ in das Funktionsprodukt einführen und definieren

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_i(x)\varphi_j(x) \cdot w(x)\, dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad (2/3)$$

($w(x)$ muß im Intervall $(x_1; x_2)$ integrierbar sein und darf dort nicht das Vorzeichen wechseln.)

Diese "Orthogonalität bezüglich einer Bewertungsfunktion" ist vorteilhaft aus Konvergenzgründen oder um Approximationsfehler in gewissen Bereichen des Intervalls $(x_1; x_2)$ kleiner zu halten.

Im Sinne dieser Definitionserweiterung ist die Bewertungsfunktion der Legendreschen Polynome $w(x) = 1$ $(-1 \leq x \leq +1)$. Die übrigen "klassischen" Orthogonalpolynome unterscheiden sich nur noch durch die Form ihrer Bewertungsfunktion, s. Abb. 20.

Nachrichtentechnisch kommt der Bewertungsfunktion die Bedeutung zu, ein irgendwie gewähltes System orthogonaler Signalfunktionen besser an einen Übertragungskanal anzupassen. Im Sinne der Bedingung $\int \varphi_i \varphi_j\, w\, dt = \delta_{ij}$ ist nur dafür zu sorgen, daß im Empfänger das Produkt $\varphi_i \varphi_j\, w$ entsteht. Die Erzeugung der Belegungsfunktion kann zweckmäßig (z.B. als $\sqrt{w(t)}$) auf Sender und Empfänger aufgeteilt werden.

Bei der Multiplikation mit $w(t)$ geht der Polynomcharakter der Orthogonalpolynome verloren, entsprechend unterscheidet die

mathematische Literatur beispielsweise:
(Jacobisches) Polynom $\cdot \sqrt{w(t)}$ = (Jacobische) Funktion.

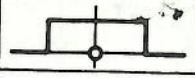
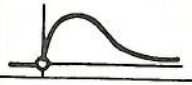
Polynom	Bewertungsfunktion $w(x)$ =		Intervall $w(x) \neq 0$
Legendre		1	$(-1;1)$
Tschebyscheff		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;1)$
Jacobi		$(x-a)^{\alpha-1} \cdot (b-x)^{\beta-1}$ $\alpha>0,\ \beta>0$	$(a;b)$
Laguerre		$x^{\alpha} e^{-x}$ $\alpha > -1$	$(0;\infty)$
Hermite		e^{-x^2}	$(-\infty;\infty)$

Abb. 20: Orthogonalpolynome (nach [27])

Für manche Aufgaben der Netzwerksynthese interessant ist das von Kautz u.a. [28], [29] angegebene System orthogonaler e-Funktionen. Das Exponentialsystem $\{e^{cjt}\}$, $(o<t)$ kann nach der Schmidtschen Methode im Zeitbereich oder nach dem von Kautz angegebenen Verfahren im Frequenzbereich orthogonalisiert werden. Man erhält beispielsweise

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2}\, e^{-t}$$
$$\varphi_2(t) = \sqrt{4}\,(-2\, e^{-t} + 3\, e^{-2t}) \qquad o < t < \infty$$
$$\varphi_3(t) = \sqrt{6}\,(3\, e^{-t} - 12\, e^{-2t} + 10\, e^{-3t})$$

Systeme orthogonaler Sprungfunktionen, wie sie von Haar oder Walsh angegeben wurden, sind zum Aufbau technischer Spektralanalysatoren recht reizvoll, da Funktionserzeugung und Multiplikation mit einfachen Torschaltungen möglich sind [23]. Abb. 21 zeigt diese Orthogonalsysteme

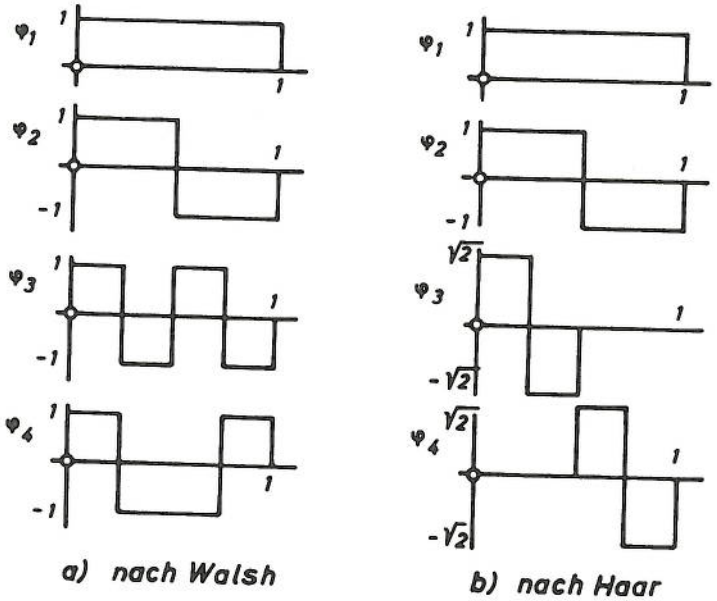


Abb. 21: Orthogonale Sprungfunktionen

Das System der Walsh'schen Funktionen wird im 3. Kapitel als Spezialfall einer allgemeineren Funktionsfamilie abgeleitet. Abschließend sei noch das von Rademacher angegebene System orthogonaler Sprungfunktionen erwähnt:

$\varphi_i(x) = \text{sign} \sin (2^{i+1} \pi x)$ im Intervall (o;1), [42].

2.2 Orthogonale Signalfunktionssysteme der Nachrichtentechnik

Die heute als Signalfunktionen gebräuchlichen Orthogonalsysteme sind nahe Verwandte der Trägerfunktionen im Zeit- bzw. Frequenzvielfach. Im Zeitmultiplex wird das Orthogonalsystem in einfacher Weise von überlappungsfrei versetzten, zeitbeschränkten Impulsen gebildet, wie Abb. 22 im Prinzip zeigt:

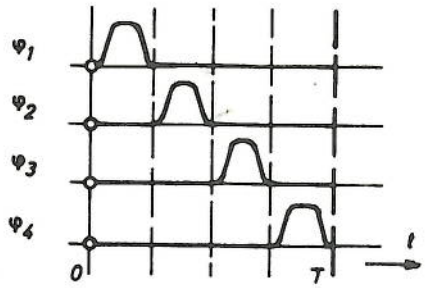


Abb. 22: Orthogonale Träger im Zeitmultiplex

Das Frequenzmultiplex benutzt die Orthogonalität der Sinusfunktionen, z.B. im Intervall $(-\pi;\pi)$, s. Abb. 23.

Zweckmäßig läßt sich das allgemeine Frequenzmultiplex noch unterscheiden in "Phasenmultiplex" $\pm \sin x$, $\pm \cos x$ und eigentliches "Frequenzmultiplex"

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x \ldots .$$

Die in Abb. 23 aus den zeitlich nicht beschränkten Sinusfunktionen herausgeschnittenen "Sinusimpulse" benötigen zur Übertragung ein breites Frequenzband. Zur Beschränkung der Bandbreite lassen sich geeignete Bewertungsfunktionen einführen. Abb. 24 zeigt ein derartig bewertetes Sinussystem, wie es von Muehldorf u.a. [16] angegeben wird. Die Ableitung dieses Systems ging wahrscheinlich (vgl. [31]) von dem "angehobenen"

cos-Impuls (raised cosine) aus und benutzte Hilbert-Transformation und Differentiation zur Ableitung der drei übrigen Funktionen.

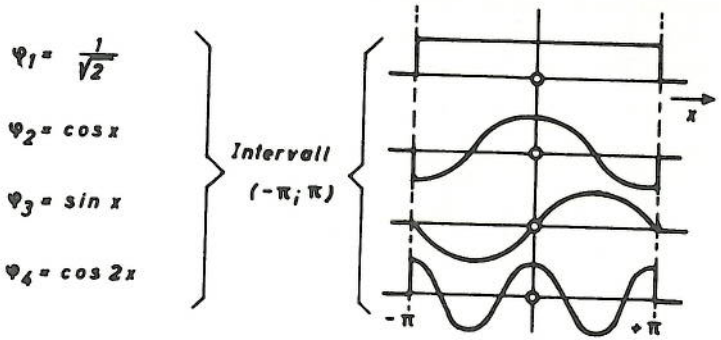


Abb. 23: Orthogonale Träger im Frequenzmultiplex

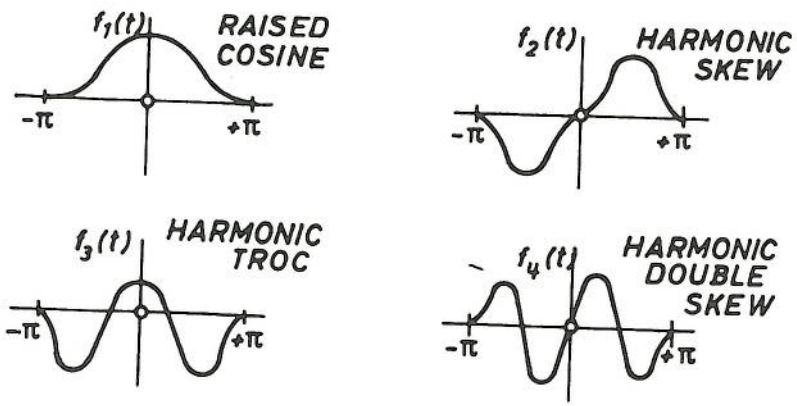


Abb. 24: Orthogonale Funktionen nach Muehldorf u.a.

Die zeitlich auf eine oder wenige Perioden beschränkten Sinusfunktionen der Abb. 23 und 24 bilden kein Frequenzmultiplex im ursprünglichen Sinn. Hierzu gehört vielmehr, daß die Spektralfunktionen eines Frequenzvielfaches in gleicher Weise wie die Zeitfunktionen des Zeitvielfaches in Abb. 22 überlappunkgsfrei sind. Ist diese Forderung erfüllt, dann ist nichtkohärenter (d.h. nicht phasenstarrer) Empfang möglich, da das Betragsspektrum bei der speziellen Spektralanalyse nach Sinusfunktionen gegen Zeitverschiebungen invariant ist. Bei genügend großer Analysezeit ist sogar asynchroner Empfang möglich, da dann in jedem Augenblick die Bedingung

$$\int_0^t f_1^2(t)\,dt > \int_0^t f_1(t)\cdot f_2(t)\,dt < \int_0^t f_2^2(t)\,dt$$

erfüllt ist, vgl. Abb. 25 (nach [32]):

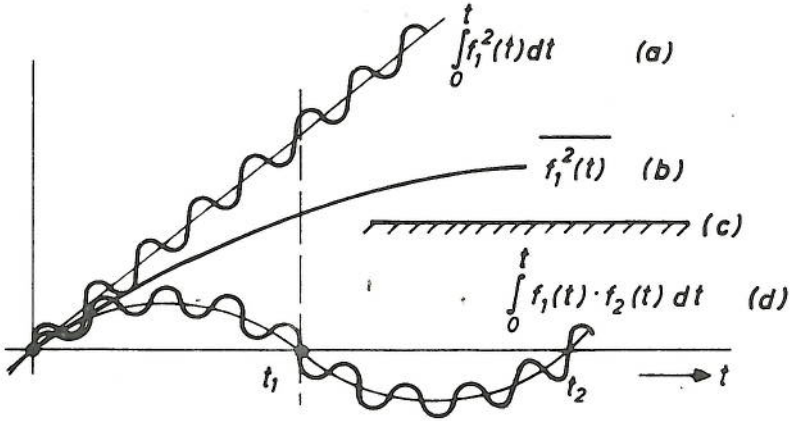


Abb. 25: zum Asynchronempfang sinusförmiger Zeitfunktionen

Dargestellt ist der Empfang eines sinusförmigen Signals f_1 aus einem Alphabet f_1, f_2. Der optimale Demodulator würde die Produktintegrale (a) und (d) bilden und zur Zeit $T = t_1$ abfragen. Der sehr viel einfachere asynchrone Empfänger begnügt sich mit quadratischer Gleichrichtung und angenäher-

ter RC-Integration (Kurve (b)) und legt die Entscheidungsschwelle (c) so, daß eine Entscheidung zu jedem Zeitpunkt $t > t_1$ möglich ist (wenn auch mit schlechterem Störabstand).

2.3 Beispiel: Erzeugung und Empfang Laguerrescher Funktionen

Laguerresche Funktionen lassen sich als Summen von Exponentialfunktionen schreiben; sie sind daher im Zeitbereich mit Hilfe von RC-Ketten technisch einfach zu realisieren.
Alle sog. klassischen Orthogonalpolynome werden durch die erweiterte Formel von Rodriguez beschrieben:

$$P_i(t) = \frac{1}{k_i w(t)} \cdot \frac{d^{(i)}}{d\,t^i}\left[w(t)\,X^i\right], \qquad (2/4)$$

wobei X die Abkürzung für ein Polynom von höchstens zweitem Grade ist [33].
Man erhält daraus die Laguerreschen Polynome durch

$$X = t$$
$$w(t) = t^a\, e^{-\alpha t} \quad (\text{mit } a > -1 \text{ und } t \geq 0)$$
und
$$k_i = \frac{1}{i!}$$

Damit wird

$$\varphi_i(t) = \sqrt{w(t)} \cdot P_i(t)$$
$$= \sqrt{e^{-\alpha t}\, t^a} \cdot \frac{1}{i!\,e^{-\alpha t} t^a}\, \frac{d^{(i)}}{d\,t^i}\left[e^{-\alpha t}\, t^a\, t^i\right]$$
$$= e^{\alpha t/2}\, t^{-a/2}\, \frac{d^{(i)}}{d\,t^i}\left[e^{-\alpha t}\, \frac{t^{a+i}}{i!}\right] \qquad (2/5)$$

Im einfachsten Sonderfall ist a = 0,

$$\text{also } {}^0\varphi_i(t) = e^{\alpha t/2}\, \frac{d^{(i)}}{d\,t^i}\left[e^{-\alpha t}\, \frac{t^i}{i!}\right] \qquad (2/6)$$

Die ersten vier Funktionen dieses Systems benutzte Leontiew [26] als Träger im Versuchsaufbau eines vierkanaligen Mul-

tiplexsystems. Zur Erzeugung der Signalfunktionen im Sender und im Korrelationsempfänger diente je eine Kettenschaltung symmetrischer RC-Vierpole.

Zur Simulierung dieses Laguerreschen Systems auf einem Analogrechner wird ${}^0\varphi_i(t)$ durch Laplace-Transformation in die zugehörige Übertragungsfunktion $A_i(p)$ der erzeugenden Filter überführt. Man erhält nach kurzer Zwischenrechnung:

$$A_i(p) = \mathcal{L}\left\{{}^0\varphi_i(t)\right\} = \frac{(p-\alpha/2)^i}{(p+\alpha/2)^{i+1}} \qquad (2/7)$$

Durch Zerlegung in Teilübertragungsfaktoren folgt daraus die Schaltung der Abb. 26, an der die $\varphi_i(t)$ abgegriffen werden können:

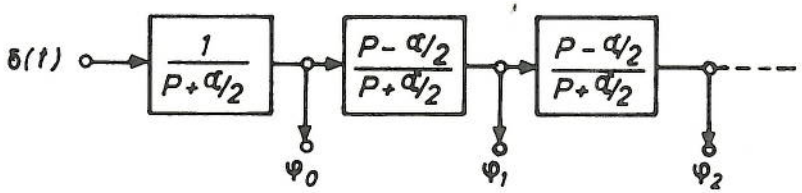


Abb. 26: Anordnung zur Erzeugung Laguerrescher Funktionen

Die Realisierung dieser Schaltung mit Hilfe des Analogrechners kann nach den Angaben von Schüßler [34] erfolgen. Ein anderer Weg zur Realisierung Laguerrescher Funktionen am Analogrechner wird von Herschel angegeben [43].
Der Anregung von Leontiew folgend, wurde der Matched Filter-Empfang durch zeitinverses Abspielen der Sendefunktionen von einem Magnetbandspeicher über die gleichen Filter simuliert. Die Abb. 27 zeigt in "Matrixform" angeordnet die Ausgangskombinationen des Demodulators und das System der Laguerreschen Funktionen selbst. Alle Stellen außerhalb der Hauptdiagonalen (i=j) zeigen also im Abtastzeitpunkt die Null.

Die Funktionen des Systems a = 0 sind im Nullpunkt unstetig und haben daher einen großen Bandbreitebedarf. Es wurden deshalb im weiteren die günstigeren, da stetigen Funktionen für a = 2 untersucht. Auf die nähere Ableitung der nicht mehr sehr einfachen Schaltungstechnik sei hier verzichtet, Abb. 28 zeigt die erhaltenen Oszillogramme wieder in "Matrixform" angeordnet.

Praktische Verwendung als Signalalphabet werden die Laguerreschen Funktionen wohl nicht finden, da einmal ihre Beschränkung im Zeit- und Frequenzbereich ungenügend ist und zum zweiten die Synthese der zugehörigen Matched Filter schwierig wird.

Auf Grund der mäßigen zeitlichen Begrenzung der Laguerreschen Funktionen erreichte Leontiew in seinem Multiplex-System selbst bei einer Integrationszeit von $\alpha t = 40$ erst eine Nebensprechdämpfung von $\geq$ 14 dB.

2.4 Abschließende Bemerkungen

Eine Prüfung an Hand der in 1.52 aufgestellten Forderungen an Signalfunktionen zeigt, daß alle von der Mathematik her bekannten Orthogonalsysteme wenig geeignet sind. Diese Funktionssysteme wurden primär zur Lösung mathematischer oder physikalischer Aufgabenstellungen abgeleitet und es ist daher auch nicht zu erwarten, daß sie als Signalfunktionen brauchbar sind.

Die technischen Signalfunktionssysteme stellen ihre Orthogonalität fast alle durch den Trick der Überlappungsfreiheit im Zeit- oder Frequenzbereich sicher. Dieses im echten Multiplexbetrieb außerordentlich vorteilhafte Verfahren verliert bei einer digitalen Signalübertragung etwas von sei-

---

Anmerkung: Die Oszillogramme der Abb. 27 und 28 wurden von Herrn Heil im Rahmen einer Institutsarbeit aufgenommen.

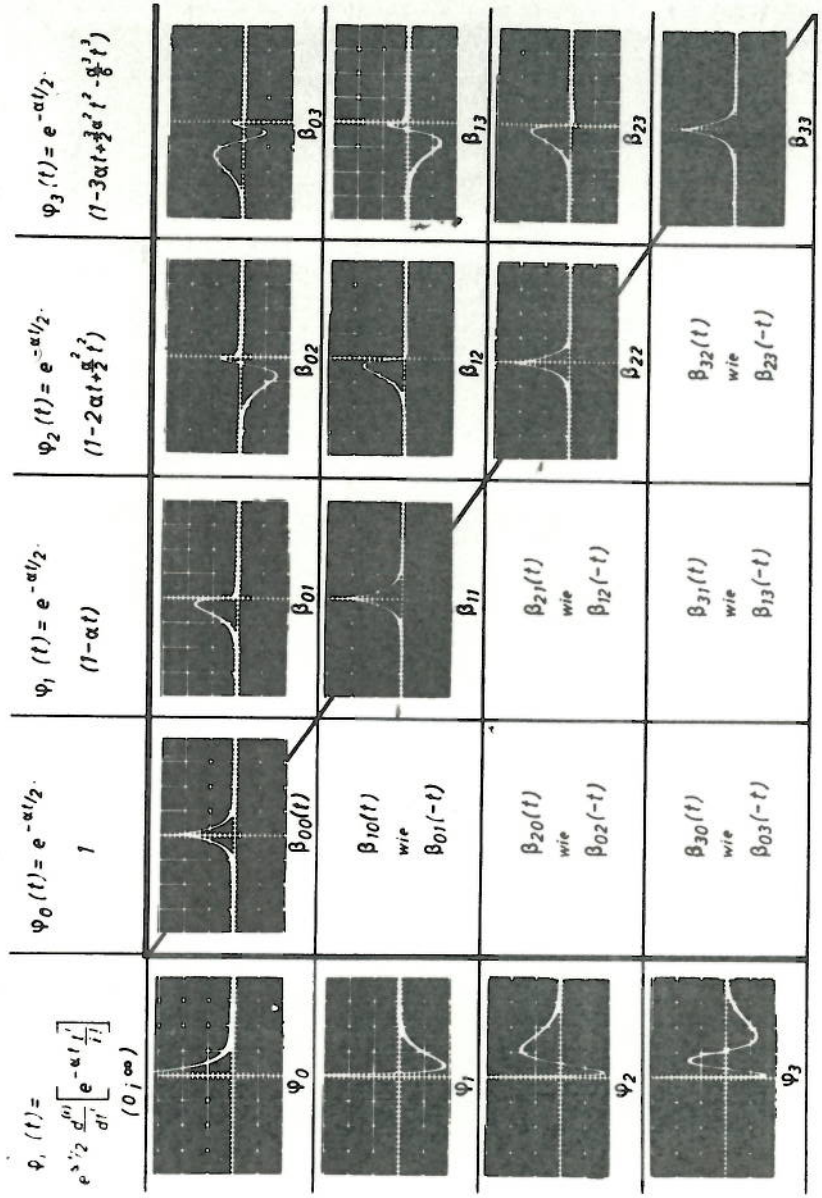


Abb. 27: Laguerresche Funktionen (a=0)

Als Bezugssystem besonders geeignet ist das System der Signalfunktionen selbst, da in diesem Fall das ungestörte Kennwertmuster die einfachst mögliche Gestalt erhält.

Die empfangene Signalfunktion $f_j(t) = s_j(t) + n(t)$ der Dauer T soll im Zeitabschnitt $t_1 \ldots t_1+T$ approximiert werden durch eine Zeitfunktion der Form

$$F_{jm}(t) = b_{jo}\varphi_o(t) + b_{j1}\varphi_1(t) + \ldots + b_{jm}\varphi_m(t) \; . \qquad (1/1)$$

$F_{jm}(t)$ ist also eine Linearkombination des im Empfänger gespeicherten Funktionssystems $\varphi_o(t) \ldots \varphi_m(t)$. Die Konstanten $b_{jo} \ldots b_{jm}$ bilden das gesuchte Kennwertmuster.
Soll die Approximation eindeutig sein, dann müssen die $\varphi_i(t)$ ein linear unabhängiges System bilden (vgl. 1.13).

Weiter ist von Einfluß, nach welchem Kriterium die Annäherung optimiert wird. Bekannte Verfahren sind z.B.:

a) Minimisieren des Integrals über das Quadrat des Fehlers

b) Minimisieren der absoluten Fehleramplitude (an sich optimale gleichmäßige Näherung, aber nur in Spezialfällen lösbar)

c) Approximation mit konstanter Abweichungsamplitude (equal ripple, Tschebyscheffsche Approximation) [11].

Die Auswahl eines Kriteriums ist an sich willkürlich.
Das erste, von Gauß angegebene Verfahren ist wohl am besten bekannt; es hat die Vorteile, einmal den Vorzeicheneinfluß zu beseitigen und zum zweiten die großen Abweichungen überproportional zu berücksichtigen. Der Rechengang ist aus der Mathematik bekannt (z.B. [6]):

Die Koeffizienten $b_o \ldots b_m$ werden nach dem Gaußschen Verfahren so bestimmt, daß das Integral der Fehlerquadrate über eine Taktperiode T minimisiert wird:

$$Q = \int_{t_1}^{t_1+T} \left[F_m(t) - f(t)\right]^2 dt = \min. \qquad (1/2)$$

Die hierfür notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots) \qquad (1/3)$$

führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial b_o} &= \int_{t_1}^{t_1+T} (F_m - f)\,\varphi_o\, dt = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial b_1} &= \int_{t_1}^{t_1+T} (F_m - f)\,\varphi_1\, dt = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (1/4)$$

und, nach Einsetzen der Reihe für F_m auf das System der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} b_o(\varphi_o\varphi_o) + b_1(\varphi_o\varphi_1) + \ldots + b_m(\varphi_o\varphi_m) &= (\varphi_o f) \\ b_o(\varphi_o\varphi_1) + \ldots\ldots \qquad &= (\varphi_1 f) \\ &\vdots \\ b_o(\varphi_o\varphi_m) + \ldots\ldots \qquad &= (\varphi_m f) \end{aligned} \qquad (1/5)$$

(mit den Abkürzungen:

$$(\varphi_i\varphi_j) = \int_{t_1}^{t_1+T} \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t)\, dt$$

$$(\varphi_i f) = \int_{t_1}^{t_1+T} \varphi_i(t) \cdot f(t)\, dt \qquad (1/6)$$

Die apparative Auflösung dieses Systems nach den gesuchten, informationstragenden Koeffizienten $b_o \ldots b_m$ erfordert umfangreiche Schaltungen, die außerdem bei Zufügen einer weiteren Funktion φ_{m+1} (entsprechend einer Vergrößerung des Signalalphabets) im ganzen geändert werden müssen.

Wählt man dagegen spezielle Funktionssysteme φ_i, für die paarweise gilt:

$$(\varphi_i \varphi_j) = \int_{t_1}^{t_1+T} \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t)\, dt = c_i \cdot \delta_{ij} \qquad (1/7)$$

(dabei ist $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$ das sog. Kroneckersche Symbol),

so verschwinden in den Normalgleichungen alle Koeffizienten $(\varphi_i \varphi_j)$ außerhalb der Hauptdiagonalen des Koeffizientenschemas.

b_i läßt sich dann sehr einfach berechnen:

$$b_i = \frac{1}{c_i} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cdot \varphi_i(t)\, dt \qquad (1/8)$$

Diese Rechenvorschrift kann mit verhältnismäßig geringem Aufwand realisiert werden. Da die Koeffizienten endgültig sind, wirkt sich eine Vergrößerung des Umfangs des Alphabets nicht in einer Änderung der schon bestehenden Schaltungen aus.

Wegen der formalen Ähnlichkeit des Ausdrucks $(\varphi_i \varphi_j) = 0$ für $i \neq j$ mit dem skalaren Produkt senkrecht (orthogonal) aufeinander stehenden Vektoren $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 0$, nennt man derartige Funktionssysteme orthogonal. In einem orthonormalen System ist außerdem $c_i = 1$.

Anmerkung:

Die Orthogonalität eines linearen Funktionssystems ist nicht, wie in der Literatur häufig angegeben, Voraussetzung für die Trennbarkeit der Signalfunktionen, sie vereinfacht aber erheblich die apparative Auflösung des Systems der Normalgleichungen.

1.3 Empfangsverfahren

Die Operation $b_{ij} = \int_{t_1}^{t_1+T} f_j(t) \cdot \varphi_i(t)\, dt$,

die den Optimalempfang orthogonaler Signalfunktionen beschreibt, entspricht der Formel zur Berechnung der Fourierkoeffizienten, wenn für die φ_j das System der sin- und cos-Funktionen eingesetzt wird. In diesem Fall würde der Optimalempfänger eine normale Spektralanalyse der empfangenen Zeitfunktion vornehmen.

Man kann so Empfänger der besprochenen Art als "verallgemeinerte Spektralanalysatoren" bezüglich des jeweiligen Orthogonalsystems auffassen.

Sind, wie üblich, die Signalfunktionssysteme in Sender und Empfänger identisch ($s_i = \varphi_i$), dann entspricht bei ungestörter Übertragung das System der b_j im Empfänger exakt dem System der Signale S_j hinter dem Sendekodierer in Abb. 2. Beliebige andere Signale (z.B. Störfunktionen) werden sinngemäß in die Folge zugeordneter Komponenten zerlegt.

Die im Empfänger erforderliche Integraloperation kann schaltungstechnisch auf zwei Arten verwirklicht werden:

1.31 Korrelationsdemodulator

Im Korrelationsdemodulator wird die Signalfunktion $f_j(t)$ in elektronischen Multiplikatoren mit den im Empfänger erzeugten Funktionen $\varphi_i(t)$ multipliziert, und die Produkte werden dann integriert (s. Abb. 3).

Die gesuchten Koeffizienten b_{ji} erscheinen am Ende der Integrationszeit der Dauer T. Zur Steuerung der Funktionserzeugung, der Integrationsanfangsbedingung und der zeitgerechten Abfrage der Koeffizienten wird ein Taktpuls benötigt, der phasenstarr am Sendetakt angeschlossen ist (in Abb. 3 angedeutet). Dieser Schaltungstyp wird im englischen Schrifttum als "correlation detector" bezeichnet [4], [12], [13].

In Abb. 4 ist zur Veranschaulichung die Korrelationsdemodulation zweier orthogonaler Signalfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ dargestellt. Die Schaltung war am Analogrechner aufgebaut.

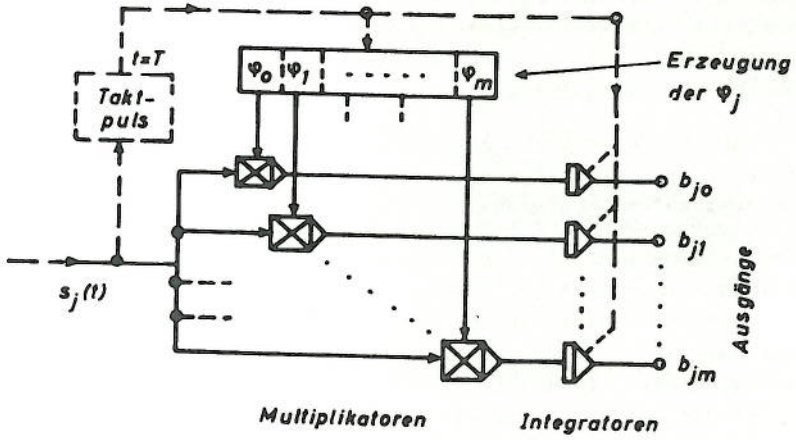


Abb. 3: Korrelationsdemodulator

$\varphi_1(t)$ ist ein 'Sinusimpuls'. $\varphi_2(t)$ dessen zeitliche Ableitung. Am Ausgang der zwei Integratoren wird am Ende jeder Taktperiode (t = T) angezeigt, welche Signalfunktion mit welcher Amplitude empfangen wurde.

1.32 Matched Filter-Demodulator

Faßt man,wie oben bemerkt, den Empfänger als verallgemeinerten Spektralanalysator auf, so entspricht der beschriebene Korrelationsdemodulator dem Suchtonanalysator (allerdings mit kohärenten, festen "Suchtönen").

In ähnlicher Weise läßt sich das Analyseverfahren mit festen Filtern verallgemeinern: die kennzeichnende Zeitfunktion (d.h. die Antwort auf die Diracsche Stoßfunktion) $a_j(t)$ der Filter muß den Signalfunktionen $\varphi_j(t)$ entsprechen, aber zeitlich gespiegelt verlaufen, also

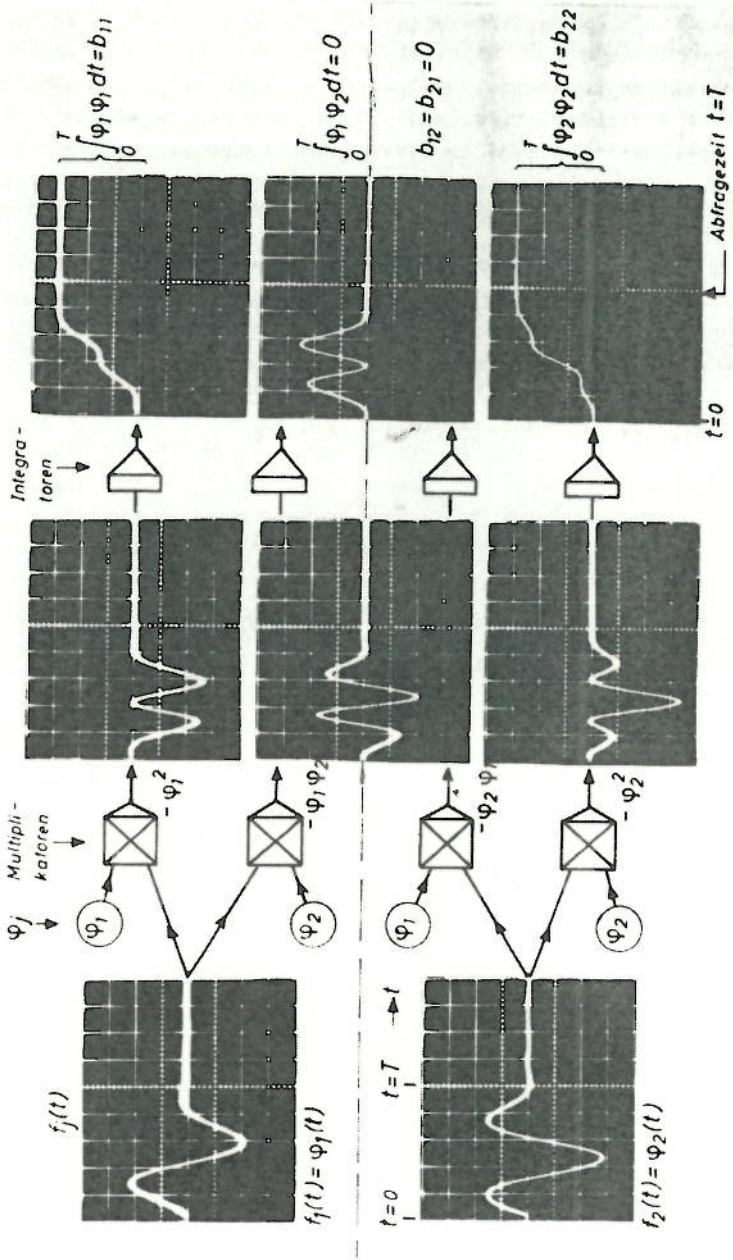


Abb. 4: Zur Korrelationsdemodulation.

$$a_j(t) = \varphi_j(t_o - t) \qquad (1/9)$$

Die zusätzliche konstante Verzögerung t_o ermöglicht die physikalische Realisierung, es muß sein $t_o \geq T$ der Zeitdauer der Signalfunktion $\varphi_j(t)$; am einfachsten setzt man $t_o = T$.

Die Antwort eines derartigen Filters ergibt sich nach dem Faltungssatz zu:

$$\beta_{ij}(t) = \int_0^t f_j(\tau)\, a_i(t-\tau)\, d\tau \qquad (1/10)$$

und mit (1/9)

$$\beta_{ij}(t) = \int_0^t f_j(\tau)\varphi_i(T - [t-\tau])\, d\tau$$

$$= \int_0^t f_j(\tau)\varphi_i(T - t + \tau)\, d\tau \qquad (1/11)$$

Zur Zeit $t = T$ nimmt die Ausgangsfunktion $\beta_{ij}(t)$ den Wert der gesuchten Koeffizienten b_{ij} an; man erhält durch Abtasten in diesem Zeitpunkt

$$\beta_{ij}(t=T) = \int_0^T f_j(\tau)\varphi_i(\tau)\, d\tau = b_{ij} \qquad (1/12)$$

Ein Filter mit derart gespiegeltem Zeitverhalten $a(t) = \varphi(t_o - t)$ wird in der amerikanischen Literatur "matched filter" genannt (matched heißt soviel wie abgestimmt auf, passend zu $\varphi(t)$). Der Empfangsvorgang trägt entsprechend die Bezeichnung 'matched filter detection' [13], [14], [15], [16]. "matched filter" werden auch als "conjugate filter" bezeichnet, da die Fouriertransformierten von Zeitfunktion und charakteristischer Zeitfunktion des zugehörigen 'matched filter' bis auf konstante Amplituden- und Laufzeitfaktoren zueinander konjugiert komplex sind [18].

Die Synthese von Filtern mit zu beliebigen Zeitfunktionen gespiegeltem Zeitverhalten ist ein nicht allgemein lösbares Problem.
Im einfachsten Fall sind die Signalfunktionen symmetrisch oder schiefsymmetrisch zu $t = T/2$, d.h. mit ihren Spiegelbildern direkt oder nach Umpolung identisch. Empfangs- und Sendefilter können dann gleich aufgebaut sein.

Für die schon zur Demonstration des Korrelationsempfängers benutzten orthogonalen Funktionen φ_1 und φ_2 (vgl. Abb. 4) wurde am Analogrechner ein Matched Filter-Demodulator aufgebaut. Sende- und Empfangsfilter können in diesem Beispiel identisch sein, da φ_2 symmetrisch und φ_1 schiefsymmetrisch zu $t = T/2$ ist. Abb. 5 zeigt die Oszillogramme vor und hinter den Filtern $\varphi_1(T-t)$ und $\varphi_2(T-t)$. Zur Zeit $t = T$, also am Ende jeder Taktperiode, werden in gleicher Weise wie beim Korrelationsdemodulator die der jeweils gesendeten Funktion zugeordneten Koeffizienten b_j durch Abtasten gewonnen. Abschließend zeigt Abb. 6 die Grundschaltung eines Matched Filter-Empfängers.

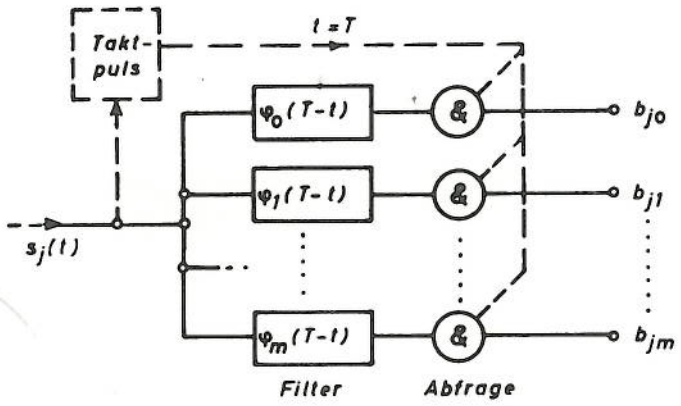


Abb. 6: Matched Filter-Demodulator

BIBLIOTHEK
DER
TECHN. HOCHSCHULE
AACHEN

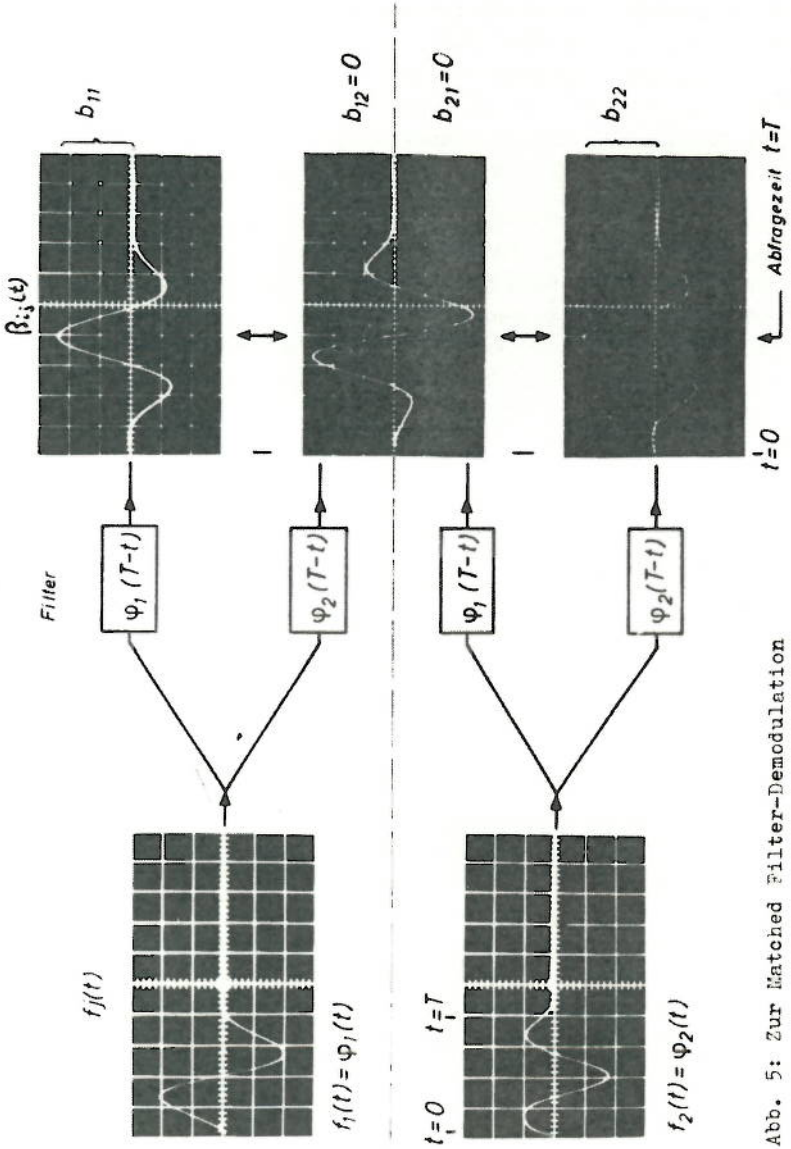


Abb. 5: Zur Matched Filter-Demodulation

Korrelations- und Matched Filter-Schaltungen lassen sich zum Empfang zusammengesetzter Zeitfunktionen auch kombinieren, ein Beispiel ist in [4] angeführt.

1.4 Die Darstellung im Nachrichtenraum

1.41 Der Nachrichtenraum

Die in 1.2 erwähnte formale Ähnlichkeit zwischen der Orthogonalitätsbedingung und dem skalaren Produkt orthogonaler Vektoren beruht auf tieferen Zusammenhängen, die eine anschauliche geometrische Interpretation des Empfangsvorganges zulassen.

Man nennt in der Theorie der Reihenentwicklungen die Menge der sich bei einer verallgemeinerten Spektralanalyse ergebenden Koeffizientenfolgen $\{b_{jo}, b_{j1} \ldots\ldots b_{jm}\}$ einen Hilbertschen Folgeraum.
Die Elemente dieses Raumes bezeichnet man als Vektoren, die Zahlen b_{ji} als die Koeffizienten dieser Vektoren.
Es läßt sich zeigen, daß diese Vektoren $\{b_{jo}, \ldots\ldots b_{jm}\}$ im wesentlichen die Eigenschaften der Ortsvektoren eines m-dimensionalen Euklidschen Raumes haben [19].

In gleicher Weise, in der der Euklidsche Raum durch ein System orthogonaler Einheitsvektoren festgelegt wird, spannt das System der m orthogonalen Signalfunktionen des Empfängers einen m-dimensionalen "Nachrichtenraum" auf (im Sinne des von Zadeh [5] für m-kanalige Multiplex Systeme definierten Nachrichtenraumes).

Jede eintreffende Signalfunktion $f_j(t)$ läßt sich als Radiusvektor (mit Ursprung im Nullpunkt) im Nachrichtenraum auffassen. Der Empfangsvorgang entspricht dann der Projektion dieses "Signalvektors" auf alle m-Raumachsen. Die Beträge b_{ji} der so entstandenen m vektorischen Komponenten sind die Ausgangsamplituden des Demodulators.

Abb. 7 zeigt die Zusammenhänge für m = 2:

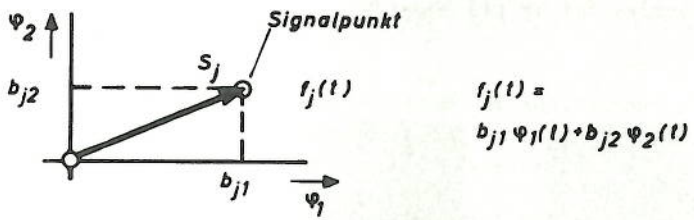


Abb. 7: Signalvektor im Nachrichtenraum

Das empfangene Signal $f_j(t)$ setzt sich aus den Nutzsignal $s_j(t)$ und einer additiv überlagerten Störgröße $n(t)$ zusammen. Der Empfangsvorgang von Netz- und Störsignal kann getrennt betrachtet werden, da das Superpositionsgesetz gilt, also

$$\left.\begin{aligned} f_j(t) = s_j(t) \\ + n(t) \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} & 0\cdot\varphi_0 + \dots b_{jj}\varphi_j + \dots 0\cdot\varphi_m + \\ & + n_0\varphi_0 + \dots n_j\varphi_j + \dots n_m\varphi_m + R(t) \end{aligned}\right. \qquad (1/13)$$

Während also das Nutzsignal nur am zugehörigen Ausgangs "j" des Demodulators erscheint, treten an a l l e n Ausgängen die entsprechenden Komponenten $n_0 \dots n_m$ des Störanteils auf. Der Term $R(t)$ bezeichnet den zu allen $\varphi_j(t)$ orthogonalen Restanteil der Störfunktion, der vom Demodulator eliminiert wird.
Zur modellmäßigen Veranschaulichung dieses Störeinflusses im Nachrichtenraum sei wieder das binäre Alphabet φ_1, φ_2 der Abb. 7 zugrundegelegt. Wird eine Folge z.B. der gleichen Signalfunktionen φ_1 gesendet, dann streuen die gestörten Signalpunkte S_1', S_1'', ... um den Ort S_1 des ungestörten Empfangs, s. Abb. 8.

Die Projektionen n_1' und n_2' des Störvektors $S_1' - S_1$ entsprechen den Störamplituden an den beiden Demodulatorausgängen.

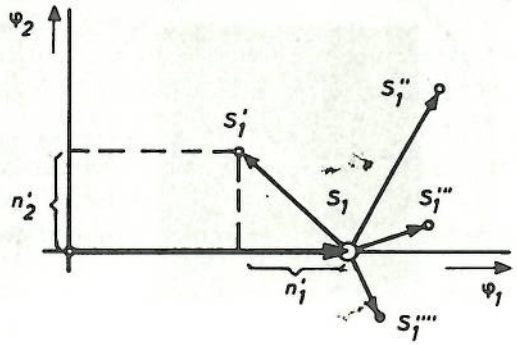


Abb. 8: Störvektoren im Nachrichtenraum

1.42 Die oszillographische Darstellung des Nachrichtenraumes

Es wurde gesagt, daß die am Demodulatorausgang anstehenden Abtastwerte als Projektionen eines Signalvektors auf die Ebenen des den Empfänger beschreibenden Nachrichtenraumes aufgefaßt werden können.

Dreht man diese Aussage um, so liegt es nahe, Empfangsprobleme auch experimentell im Nachrichtenraum darzustellen. Es genügt nämlich, je zwei Demodulatorausgänge mit den X- und Y-Eingängen eines Oszillographen zu verbinden, um die zugehörige Ebene des Nachrichtenraumes mit ihren Signalpunkten abzubilden.

Zur Demonstration dieses Verfahrens wird der zweidimensionale Nachrichtenraum des bereits in Abb. 4 benutzten Korrelationsdemodulators oszillographiert.
Als Sendefunktionen werden einmal der Sinusimpuls $\pm\varphi_1$ und seine Ableitung $\pm\varphi_2$ sowie deren vier Linearkombinationen $(\pm\varphi_1) + (\pm\varphi_2)$ in den Empfänger eingegeben.

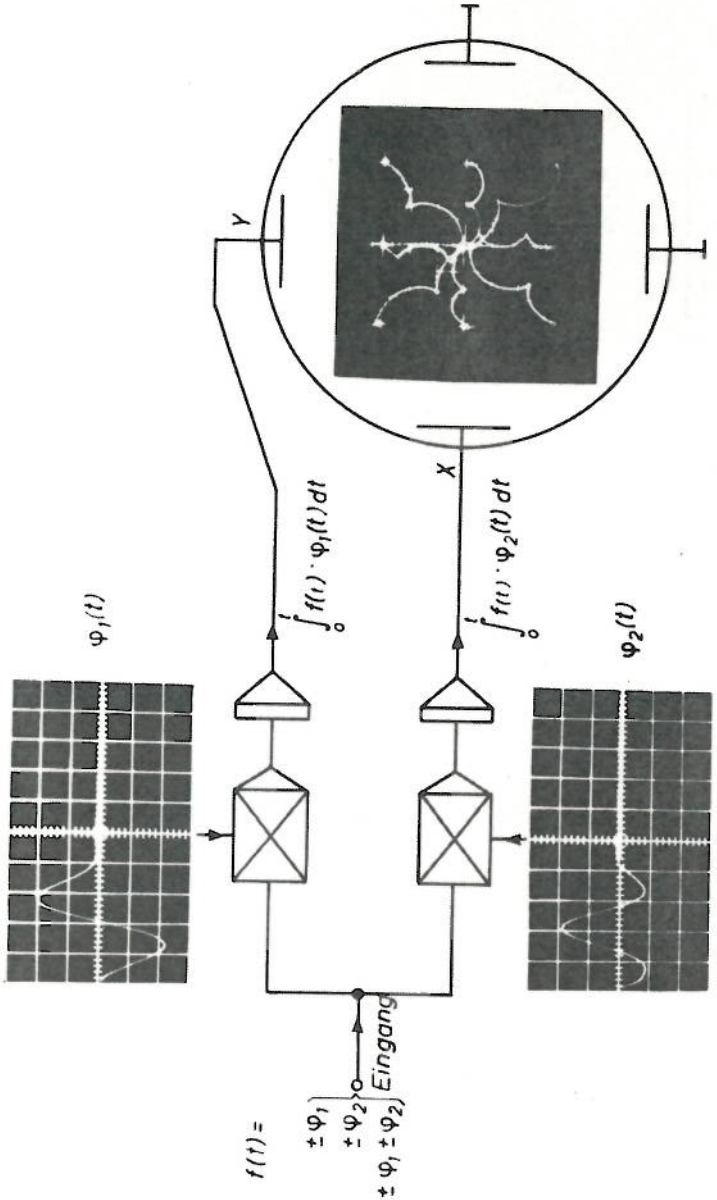
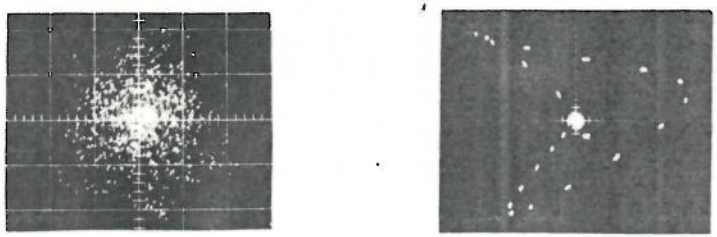


Abb. 9: Zur Darstellung des Empfangsvorganges im Nachrichtenraum

Abb. 9 stellt den Empfangsprozeß im Nachrichtenraum dar. Die Integratorausgangsspannungen sind hier nicht abgetastet, um die Ortskurven sichtbar zu machen, auf denen sich die Signalpunkte des Signalalphabets während der Rechenzeit des Empfängers bewegen.
Die den acht Signalfunktionen zugeordneten Signalpunkte sind dann durch die Endpunkte der erzeugenden Ortskurven gegeben.

Interessant wird dieses anschauliche Verfahren bei der Darstellung der Streuräume gestörter Signalfunktionen. Als Beispiel einer derartigen "analogen Störmessung" zeigt Abb. 10 die Streuräume eines (später besprochenen) Alphabets bei Störung durch additives bandbegrenztes Rauschen (a) und bandbegrenzte kurze Impulse mit verschiedenen äquidistanten Anfangsphasen (b).



a) b)

Abb. 10: Streubereiche gestörter Signalfunktionen im Nachrichtenraum

Störsignale: a) bandbegrenztes Rauschen
b) bandbegrenzte kurze Impulse

In beiden Oszillogrammen sind (im Gegensatz zu Abb. 9) nur die Signalpunkte selbst hellgesteuert. Der Ort ungestörten Empfangs liegt im Schnittpunkt der Rasterachsen.
Die Auswertung derartiger Streuräume wird im 4. Kapitel dem Vergleich verschiedener Signalalphabete zugrundegelegt.

1.43 Problem des Mustervergleichs (Entscheidungsstufe)

In 1.2 wurde der Empfangsvorgang in digitalen Systemen als zweistufig beschrieben: im eigentlichen Demodulator wird die eintreffende Signalfunktion in ein Kennwertmuster von verallgemeinerten Fourierkoeffizienten zerlegt (Analyse) und darauf wird in einer zweiten Stufe diesen (i.a. gestörten) Kennwerten das ähnlichste der endlichen Anzahl ungestörter Muster zugeordnet (Entscheidungsstufe). In den Nachrichtenraum übersetzt erhält man folgende Aussage:

Der Demodulator spannt den Nachrichtenraum auf und weist jeder eintreffenden Signalfunktion einen Punkt in diesem Raum an; die Entscheidungsstufe steckt um jeden Signalpunkt des ungestörten Musters ein festes Gebiet ab und trifft seine Entscheidung größter Ähnlichkeit danach, in welches Gebiet ein gestörter Signalpunkt fällt.

In Abb. 11 ist der Nachrichtenraum für ein zweidimensionales orthogonales Signalfunktionssystem dargestellt.

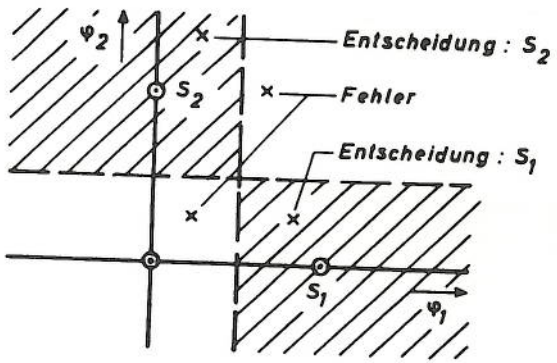


Abb. 11: Entscheidungsgebiete im Nachrichtenraum (absolute Entscheidung)

S_1, S_2 sind die Signalpunkte ungestörten Empfangs. Die gestrichelten Linien bezeichnen die Schwellen von Amplituden-

sieben, welche hinter den Demodulatorausgängen angeordnet sind. Ist das Störsignal so gering, daß die Signalpunkte noch in den umgebenden schraffierten Bereich fallen, dann wurde die Nachricht richtig empfangen, das Amplitudensieb gibt den korrigierten Kennwert weiter. Bei stärkeren Störungen gibt es zwei Möglichkeiten, einmal kann der Signalpunkt in die nichtschraffierten Bereiche fallen, d.h. beide oder keine der Schwellen werden überschritten, dann kann ein Fehlersignal gesetzt werden. Zum zweiten kann der Signalpunkt in den anderen schraffierten Bereich fallen, dann wird ein falscher Kennwert weitergegeben. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Fehlentscheidung ist offensichtlich dann minimal, wenn die Entscheidungsgrenzen von beiden Signalpunkten S_1 und S_2 gleichweit entfernt liegen; d.h. die Amplitudenschwellen müssen auf die halbe Höhe der am Demodulatorausgang erscheinenden ungestörten Koeffizientenamplitude eingestellt werden (gleiche Wahrscheinlichkeit aller Signalfunktionen vorausgesetzt).

Nachteilig an diesem System der "absoluten Entscheidung ist, daß die optimale Einstellung von der Signalamplitude abhängig ist. Günstiger wäre ein Relativvergleich der Kennwertamplituden am Demodulatorausgang. Im Nachrichtenraum ist ein System mit "relativer Entscheidung in Abb. 12 eingezeichnet.

Schaltungstechnisch läßt sich ein solches Entscheidungssystem mit Komparator- oder Extremwertschaltungen (z.B. [20]) verwirklichen.

In Abb. 13 ist zum Vergleich die Aussagelogik beider Systeme noch einmal zusammengefaßt.

Wie anschaulich auch kompliziertere Entscheidungssysteme im Nachrichtenraum dargestellt werden können, mögen zwei weitere Beispiele zeigen.

Im ersten enthält die Entscheidungsstufe eine Kombination aus absoluten und relativen Amplitudensieben (s. Abb. 14).

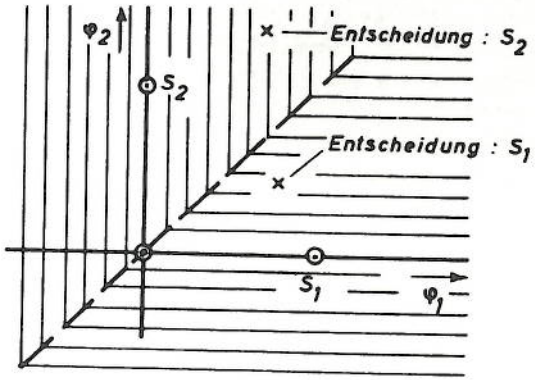


Abb. 12: Relative Entscheidung

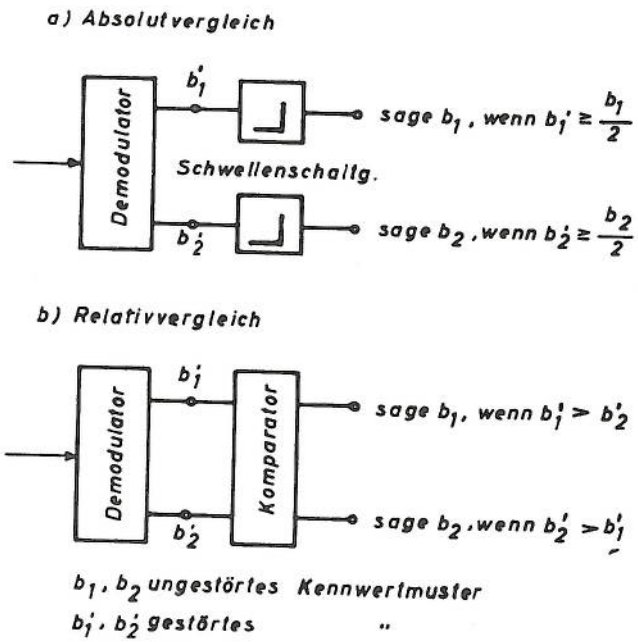


Abb. 13: Aussagelogik absoluter und relativer Entscheidung

Mit dieser Anordnung verglichen, haben Systeme mit nur relativer Entscheidung den Nachteil, bei Ausfall der Sendefunktionen die Störungen in der Umgebung des Nullpunktes zu vergleichen und als Signale anzuzeigen.

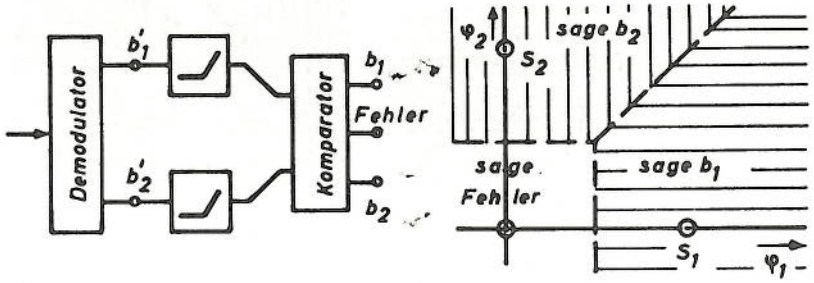


Abb. 14: Kombination absoluter und relativer Entscheidung

Als zweites Beispiel sei der "null zone" Empfang nach Bloom u.a. [21], [22] betrachtet. Durch Erhöhung der Schwellenzahl zwischen den Entscheidungsbereichen kann die Fehlerwahrscheinlichkeit verringert werden. Der Empfang eines Signals in dem Bereich zwischen zwei oder mehr Schwellen ("null zone") zeigt an, daß die Entscheidung nicht mit ausreichender Sicherheit getroffen werden kann, und ein Fehlersignal wird gesetzt.

Abb. 15 zeigt die Darstellung des "single null zone"-Empfängers für ein zweidimensionales Orthogonalsystem.

1.44 Zur optimalen Ausnutzung des Nachrichtenraumes

Wird angenommen, daß der Betrag der Störvektoren mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P unter einem festen Wert $|N(P)|$ bleibt, dann liegen die gestörten Signalpunkte S_j' mit dieser Wahrscheinlichkeit P innerhalb einer m-dimensio-

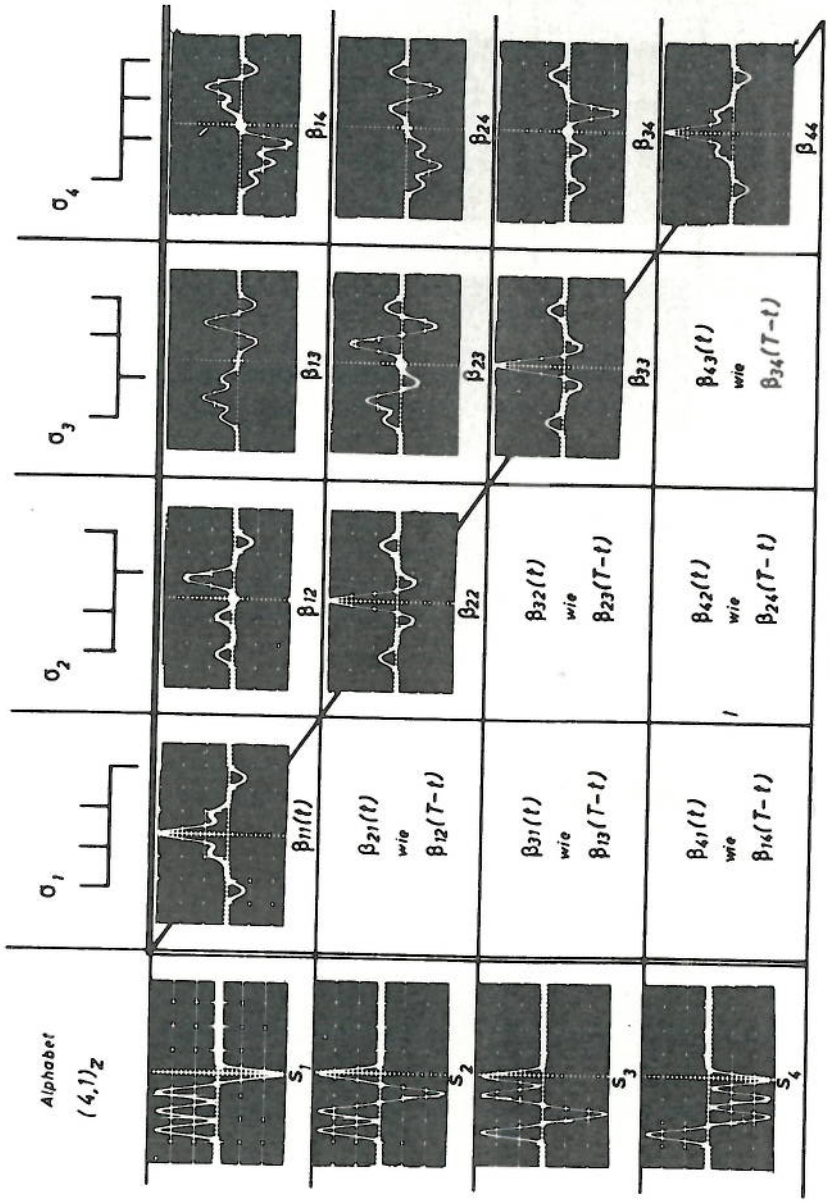


Abb. 36: Alphabet $(4,1)_z$ (belegt mit Formimpulsen)

geraden mit einer ungeraden Funktion ist allein stets ungerade).

Größere Alphabete ($m > 2$) können demzufolge nur konstruiert werden, wenn die Bewertungsfunktion gewissen Einschränkungen unterliegt.

Als nächstes sollen daher Lösungen der Zusatzbedingung in folgender Form betrachtet werden:

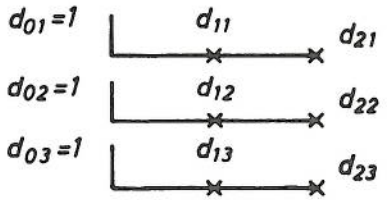
$$W_1 \neq 0 \quad , \quad K_1(i,j) = 0$$

$$W_q = 0 \quad , \quad K_q(i,j) \text{ beliebig für } q = 2,3,4 \ldots$$

in Worten: es sollen beliebige Belegungsfunktionen der Fußbreite $\leq 2\tau_0$ zugelassen sein, dafür muß die Summe der Kreuzprodukte erster Ordnung $K_1(i,j)$ verschwinden.

Der allgemeine Lösungsweg sei am Beispiel eines ternären Alphabets ($m = 3$) gezeigt. Die Zahl der Lösungen ist zunächst einmal unendlich, da in einem unnormierten System jede Strukturfunktion mit beliebigen Faktoren multipliziert werden darf. Es wird daher vorerst willkürlich festgesetzt: $d_{oj} = 1$ für alle j.

Aus der Orthogonalitätsrelation und der Kreuzproduktregel lassen sich je drei Gleichungen aufstellen. Diesen 6 Gleichungen müssen mindestens 6 Unbekannte gegenüberstehen; das unbekannte System erhält also folgende minimale Form:



und es gilt das Gleichungssystem:

Orthogonalität
$$\begin{cases} 1 + d_{11}\, d_{12} + d_{21}\, d_{22} = 0 \\ 1 + d_{11}\, d_{13} + d_{21}\, d_{23} = 0 \\ 1 + d_{12}\, d_{13} + d_{22}\, d_{23} = 0 \end{cases}$$

Kreuzprodukte

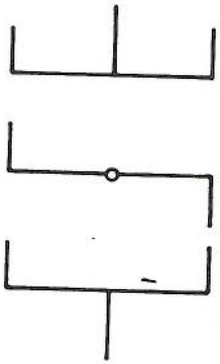
$K_1 = 0$
$$\begin{cases} d_{12} + d_{11} + d_{11}\, d_{22} + d_{21}\, d_{12} = 0 \\ d_{13} + d_{11} + d_{11}\, d_{23} + d_{21}\, d_{13} = 0 \\ d_{13} + d_{12} + d_{12}\, d_{23} + d_{22}\, d_{13} = 0 \end{cases}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem läßt sich von 6 Gleichungen 2. Grades auf je eine Gleichung 7. Grades für jede Unbekannte reduzieren. Man erhält 7 verschiedene Lösungen. Davon sind 6 Lösungen nur die 3! = 6 Permutationen des gesuchten Systems:

$1_i + \sqrt{2}_i\, 1$

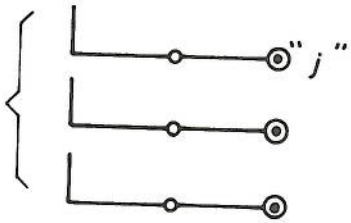
$1_i\ 0_i - 1$

$1_i - \sqrt{2}_i\, 1$



Die 7. Lösung ist nicht reell:

$1_i\ 0_i\ j$



Belegt man die Strukturfunktionen der reellen Lösung mit zeit-frequenzbeschränkten Formimpulsen der Breite $2\tau_0$, dann ergibt sich das in Abb. 37 mit seinen Korrelationsfunktionen dargestellte Signalalphabet. (Das Alphabet ist normiert, s.u.)

Zur vereinfachten Benennung erhalten die verschiedenen Signalalphabete im folgenden eine Kurzbezeichnung in der Form (m, q^+). Die erste Zahl m gibt den Umfang des Alphabets an, die zweite q^+ die Ordnungszahl der ersten nicht verschwindenden Kreuzproduktsumme. Diese zweite Zahl entspricht zugleich der maximalen Fußbreite einer impulsförmigen Bewertungsfunktion, gemessen in τ_0. Ergänzt werden kann die Bezeichnung durch Anhängebuchstaben wie z = zyklisch, l = linear und g = "gleichstromfrei" (vgl. 3.31). Die Alphabete der Abb. 35 und 36 werden also jetzt durch $(4,1)_z$ gekennzeichnet, das Alphabet der Abb. 37 trägt die Bezeichnung (3,2).

Die Synthese umfangreicherer Alphabete wie (4,2), (5,2) usw. durch Aufstellen und Lösen entsprechender Gleichungssysteme ist möglich aber recht unhandlich.
Die Gleichungssysteme lassen sich entscheidend vereinfachen, wenn man von folgender Überlegung ausgeht: Es gibt unendlich viele Alphabete der Form z.B. (4,2). Gesucht wird aus dieser Menge das oder die Alphabete mit der kürzesten Strukturfunktion ($n \rightarrow \min$). Das einfachste Verfahren hierzu ist, einmal die Zahl der Unbekannten d_{ij} nicht größer als die Zahl der notwendigen Bedingungen zu wählen und zum zweiten die Zahl der notwendigen Bedingungen durch Voraussetzen nur symmetrischer und schiefsymmetrischer Strukturfunktionen zu reduzieren.

Als Beispiel des Alphabetes (4,2) sei dieses Vorgehen erläutert: Von den vier Strukturfunktionen des gesuchten Alphabets werden je zwei als symmetrisch und schiefsymmetrisch angesetzt. Orthogonalitäts- und Kreuzproduktbedingungen sind darin in allen paarweisen Kombinationen einer symmetrischen mit einer schiefsymmetrischen Funktion bereits erfüllt. Es bleiben vier Gleichungen übrig, denen mindestens vier Unbekannte gegenüberstehen müssen, also

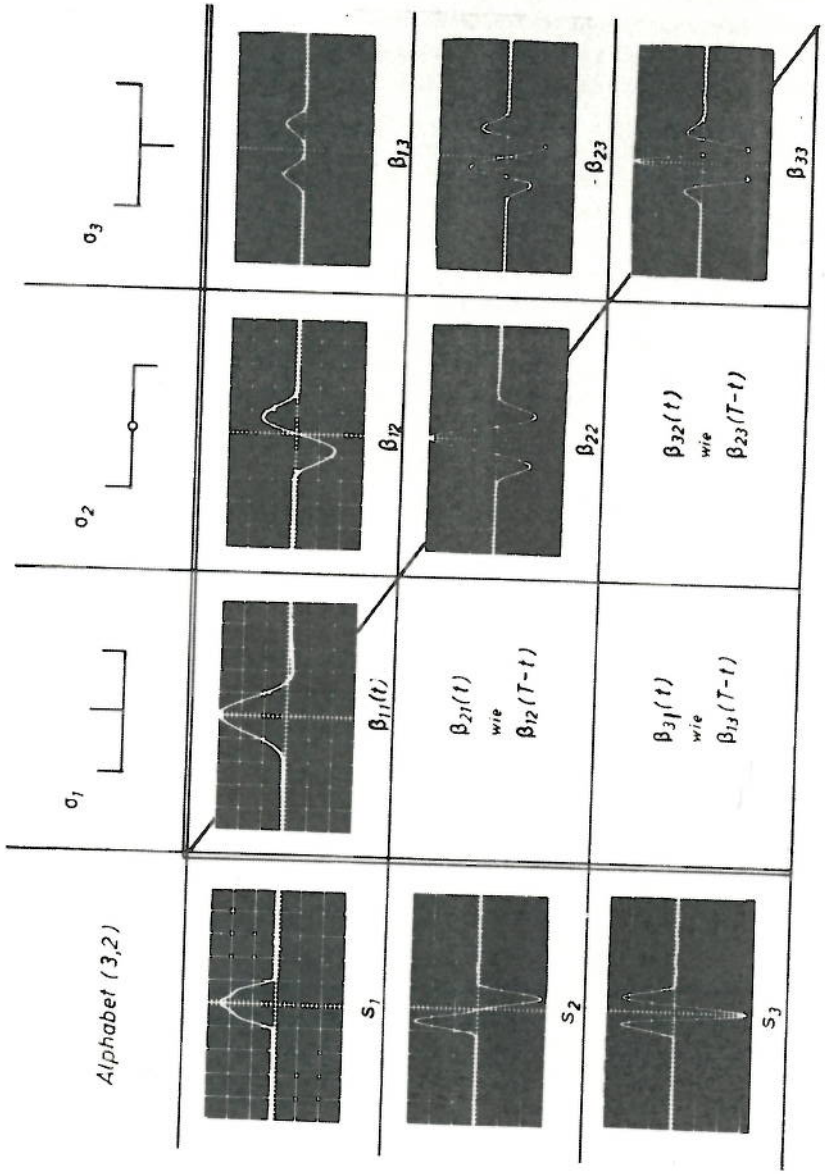
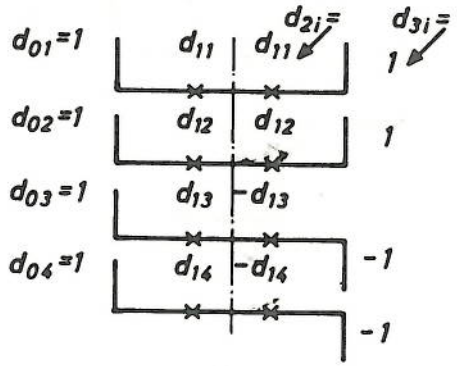


Abb. 37: Alphabet (3,2)



Orthogonalität: $2 + 2\, d_{11}\, d_{12} = 0$

$2 + 2\, d_{13}\, d_{14} = 0$

Kreuzprodukte: $2d_{11} + 2d_{12} + 2d_{11}\, d_{12} = 0$

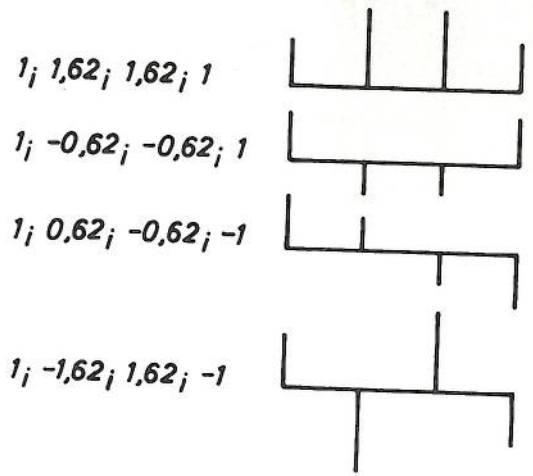
$2d_{13} + 2d_{14} + 2d_{13}\, d_{14} = 0$

Die Auflösung ergibt

$$d_{11} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \qquad d_{12} = -\frac{1}{d_{11}}$$

$$d_{13} = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5}) \qquad d_{14} = -\frac{1}{d_{13}}$$

Die beiden Lösungen sind äquivalent, es sind die zwei Möglichkeiten, ein Paar zu permutieren. Das einfachste Alphabet (4,2) hat also die Form:



Der Ansatz mit nur symmetrischen und schiefsymmetrischen Funktionen vereinfacht das zu lösende Gleichungssystem also erheblich. Im Beispiel des Alphabets (4,2) lassen sich die ursprünglich erforderlichen 12 Gleichungen 2. Grades auf zwei unabhängige Systeme von je 2 Gleichungen reduzieren.

Im allgemeinen Fall der Synthese eines Alphabets (m,2), also des Umfangs m, muß man zwei Fälle unterscheiden:

1. m gerade ($m = 2\varkappa$ für $\varkappa = 1,2, \ldots$)

   Es werden gleich viele $(\frac{m}{2})$ symmetrische wie schiefsymmetrische Strukturfunktionen angesetzt. In jeder dieser zwei Gruppen sind je $\binom{m/2}{2}$ Orthogonalitäts- und Kreuzproduktbedingungen zu erfüllen. Die Zahl der Unbekannten pro Strukturfunktion muß mindestens $\frac{2\binom{m/2}{2}}{m/2}$ betragen, daraus ergibt sich die Länge der Strukturfunktionen zu

$$n_{min} = 2 + 2 \cdot \frac{2\binom{m/2}{2}}{m/2} = 2 + \frac{8}{m}\,\frac{(m/2)!}{2!(m/2-2)!} = m$$

2. m ungerade ($m = 2\varkappa + 1$, $\varkappa = 1,2, \ldots$)

   Die beiden Gruppen der symmetrischen und schiefsymmetrischen Strukturfunktionen haben nicht mehr gleichen Umfang. Jedoch läßt sich zeigen, daß auch hier $n_{min} = m$ gilt, wenn die Gruppe der symmetrischen Funktionen die um eins umfangreichere ist. Der jetzt geringeren Zahl der für die schiefsymmetrischen Funktionen geltenden Gleichungen steht ebenfalls eine geringere Zahl von Unbekannten gegenüber, da schiefsymmetrische Strukturfunktionen mit ungeradem n in ihrer Mitte eine Nullstelle besitzen.

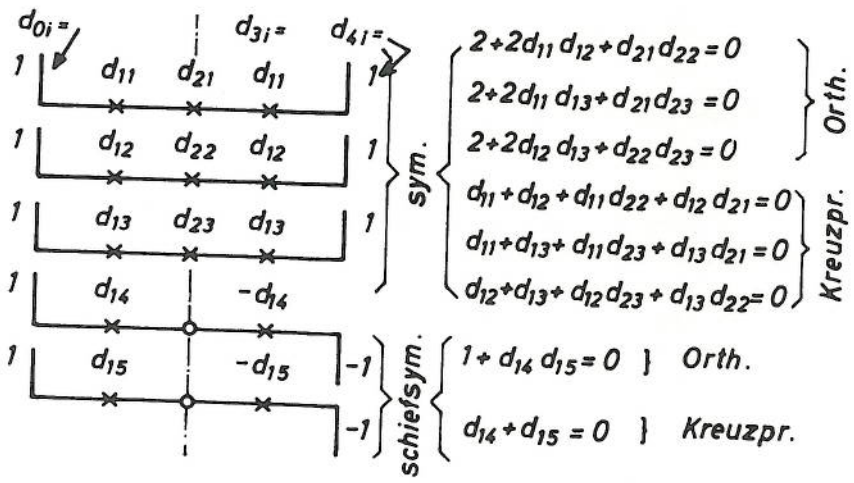
   Es gilt für die symmetrischen Strukturfunktionen

$$n_{min} = 2 + 2\,\frac{2\binom{\frac{m+1}{2}}{2}}{\frac{m+1}{2}} - 1 = m$$

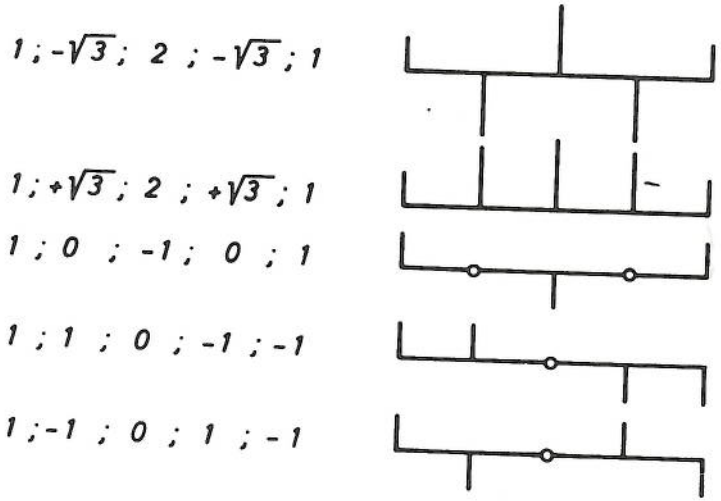
   und für die schiefsymmetrischen entsprechend

$$n_{min} = 3 + 2\,\frac{2\binom{\frac{m-1}{2}}{2}}{\frac{m-1}{2}} = m$$

In einem weiteren Beispiel seien die Zusammenhänge noch einmal verdeutlicht: gesucht ist das Alphabet (5,2). Es gilt also $m = n_{min} = 5$; weiter ist m ungerade: das System wird mit 3 symmetrischen und 2 schiefsymmetrischen Strukturfunktionen angesetzt:



Die reelle Lösung des Systems hat folgende Form:



Alphabet (5,2)

Die zugehörigen Signalfunktionen und die Ausgangsfunktionen der Matched Filter zeigen die Oszillogramme der Abb. 38.

Die Ableitung noch umfangreicherer Alphabete ($m \geq 6$) führt selbst in diesem vereinfachten Verfahren bald auf sehr große Gleichungssysteme, die eine manuelle Berechnung schwierig gestalten.

Ein anderer, gangbarer Weg, der zu beliebig umfangreichen Alphabeten der Art (4,2), (8,2), (16,2) etc. führt, soll daher noch angegeben werden, obwohl die zugehörigen Strukturfunktionen redundant orthogonal sind.

> Anmerkung: Als redundant orthogonal seien Alphabete bezeichnet, deren Strukturfunktionen eine Länge $n > n_{min}$ besitzen. Redundant orthogonale Alphabete können außer den notwendigen Orthogonalitäts- und Kreuzproduktrelationen weiteren Bedingungen gehorchen (z.B. alle $|d_{ij}| = 1$). Ein Maß für die Redundanz ist die relative Längenabweichung $R = \frac{n-n_{min}}{n}$. Redundante Alphabete werden im folgenden durch den Anhängebuchstaben r gekennzeichnet.

Es läßt sich zeigen, daß sich redundant orthogonale Alphabete $(2^{\varkappa},2)_r$ ($\varkappa = 2,3,4 \ldots$), die der Zusatzbedingung $|d_{ij}| = 1$ oder 0 genügen, sehr einfach durch 'Dehnen' der Strukturfunktionen (4,1), (8,1) usw. (nach Abb. 33) herleiten lassen.

Das Ausgangspaar σ_1, σ_2 dieser Familie ist symmetrisch-schiefsymmetrisch, daher verschwinden seine sämtlichen Kreuzproduktsummen. Diese Eigenschaft bleibt nun für die Kreuzproduktsumme erster Ordnung bei dem Alphabet $(4,1)_1$ und den daraus abgeleiteten Funktionen (linke Hälfte der Abb. 33) erhalten, wenn die Erzeugenden σ_1 und σ_2 jeweils durch Nullstellen getrennt werden. Die entstehenden Alphabete können anschaulich als gedehnt bezeichnet werden. Wie man leicht einsieht, lassen sich die Alphabete 'z----' (rechte Seite in Abb. 33) nicht dehnen, da in allen Kombinationen der Form

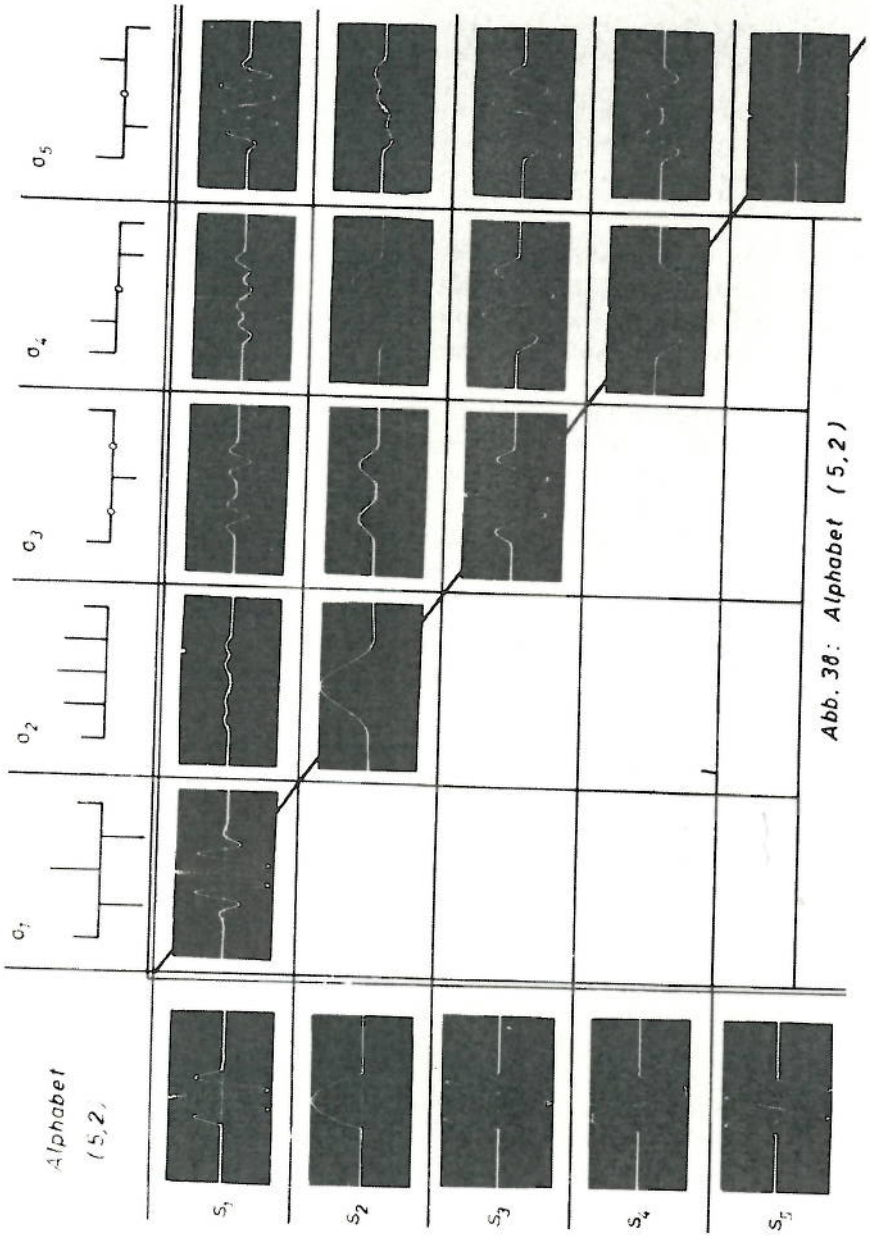


Abb. 38: Alphabet (5,2)

$$\ldots\ 0,\ \sigma_i,\ 0,\ \sigma_j,\ 0,\ \ldots$$
$$\ldots\ 0,\ \sigma_i,\ 0,-\sigma_j,\ 0,\ \ldots$$

die Kreuzproduktsumme 1. Ordnung nicht verschwindet.

Die Familie der gedehnten Alphabete ist in Abb. 39 dargestellt.

Die Redundanz dieser Systeme wächst mit steigendem Umfang m gegen einen Grenzwert $R_\infty = 1/3$.

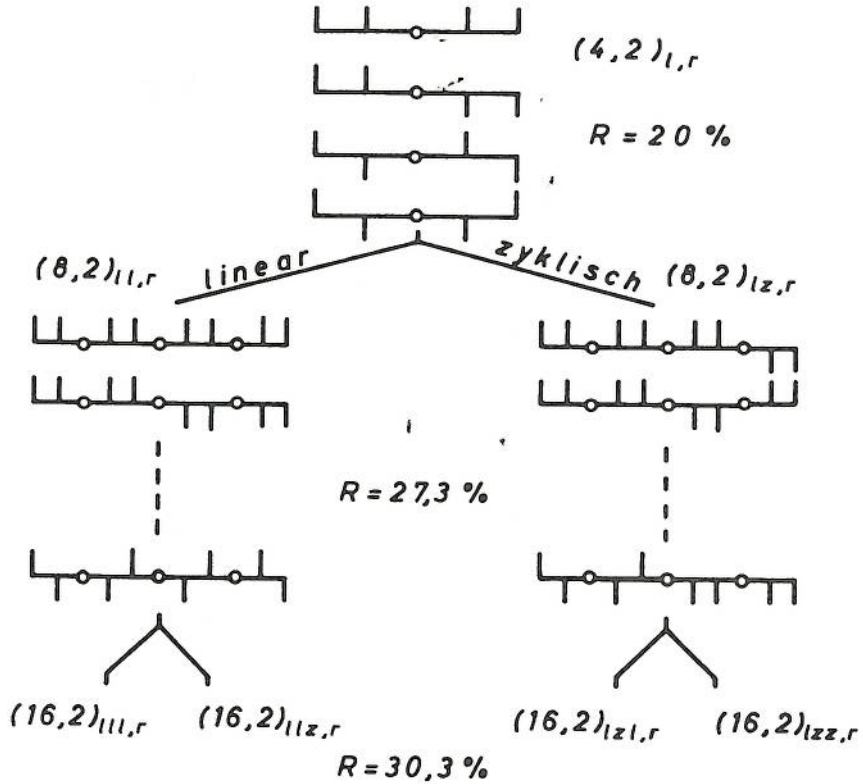


Abb. 39: Familie gedehnter Alphabete

3.33 Zur optimalen Belegungsdichte

Die Synthese der Alphabete (m,3), (m,4) usw. kann völlig dem für die (m,2) beschriebenen Verfahren folgen, nur sind der größeren Zahl der Kreuzproduktbedingungen entsprechend mehr Unbekannte gegenüber zu stellen, d.h. die Strukturfunktionen werden länger. Als herausgegriffenes Beispiel möge das Alphabet (3,4) dienen (Abb. 40):

$1_i\ 2{,}62_i\ 3{,}41_i\ 2{,}62_i\ 1$

$1_i\ -2{,}62_i\ 3{,}41_i\ -2{,}62_i\ 1$

$1_i\ 1_i\ 0_i\ -1_i\ -1$

$(3{,}41\cdots = 2+\sqrt{2}\ ;\ 2{,}62\cdots = 2\sqrt{1+1/\sqrt{2}})$

Abb. 40: Alphabet (3,4)

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit es sinnvoll ist, Alphabete zu errechnen, deren Kreuzproduktsummen höherer Ordnung ebenfalls verschwinden.
Zunächst bringt die hierdurch erreichte größere Belegungsdichte t_0/τ_0 eine beträchtliche Verkleinerung des Zeit-Bandbreite-Produktes, wie der Vergleich der Alphabete (4,1) und (4,2) in Abb. 41 zeigt.

Wird also für beide Alphabete dieselbe Belegungsfunktion vorausgesetzt, so verringert das dichter belegbare Alphabet (4,2) die benötigte Übertragungszeit auf 62,5 %. Dabei ist

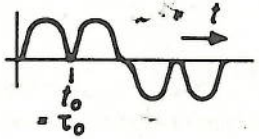
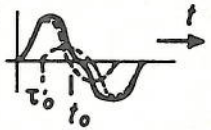
Alphabet:	(4,1)	(4,2)
σ_i		
s_i (t_0 = const.)		
Belegungdichte t_0/τ_0	1	2
$\frac{(TB)}{(TB)_{(4,1)}}$	100%	$\approx \frac{5}{8} = 62{,}5\%$

Abb. 41: Vergleich von Alphabeten unterschiedlicher Belegungsdichte

allerdings bisher der Einfluß der Faltung der Belegungsfunktion mit der Strukturfunktion auf die resultierende Bandbreite der Signalfunktionen unberücksichtigt geblieben. Dieser Einfluß verhindert, daß das Zeit-Bandbreite-Profukt mit steigender Belegungsdichte monoton fällt, die Funktion $TB|_{t_0=\text{const}} = f\,(t_0/\tau_0)$ durchläuft vielmehr für eine bestimmte Belegungsdichte ein Minimum, dessen Lage für ein einfaches Beispiel abgeschätzt werden soll:

Gegeben sei die Strukturfunktion $\sigma(t) = \delta(t) - \delta(t-\tau_0)$, die mit einem cos-Impuls der Fußbreite t_0 = const gefaltet wird (s. Abb. 42):

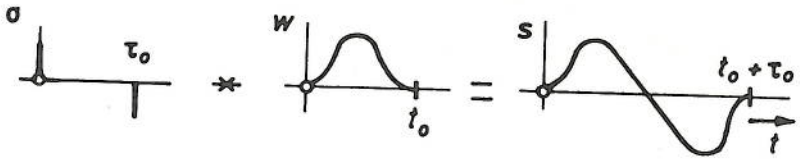


Abb. 42: $\sigma(t) * w(t) = s(t)$

Gesucht ist das Zeit-Bandbreite-Produkt der entstehenden Funktion s(t) in Abhängigkeit von der Belegungsdichte.

s(t) ist auf eine Zeit $T = t_o + \tau_o$ exakt begrenzt. Zur Bestimmung der Bandbreite werden wegen der unendlichen Ausdehnung des Spektrums Schranken eingeführt, deren Höhen einem willkürlich wählbaren Bruchteil q_f des Maximalwertes der Spektraldichte entsprechen. Außerhalb der so definierten Grenzfrequenzen überschreitet der Betrag der Spektraldichte die Schranke nicht mehr (vgl. [38]).
Die mit einem graphischen Verfahren gefundenen Zeit-Bandbreite-Produkte sind in Abb. 43 dargestellt, und zwar für drei verschiedene Schranken q_f = 10 %, 5 %, 1 % als Parameter.
Das Zeit-Bandbreite-Produkt durchläuft also ein flaches Minimum für Belegungsdichten von etwa $t_o/\tau_o \approx 2....4$.
Daraus darf verallgemeinernd geschlossen werden, daß die Alphabete (m,3) und (m,4) keine wesentliche Verminderung, Alphabete deren Kreuzproduktsummen noch höherer Ordnung verschwinden dagegen eine zunehmende Vergrößerung des Zeit-Bandbreite-Produktes bringen werden.

3.34 Gleichanteilfreie Alphabete

In 1.51 war aus praktischen Gründen die Forderung erhoben worden, daß der zeitliche Mittelwert $\overline{\varphi} = \int_0^T \varphi(t)\,dt$ (Gleichanteil) einer Signalfunktion möglichst verschwinden soll.

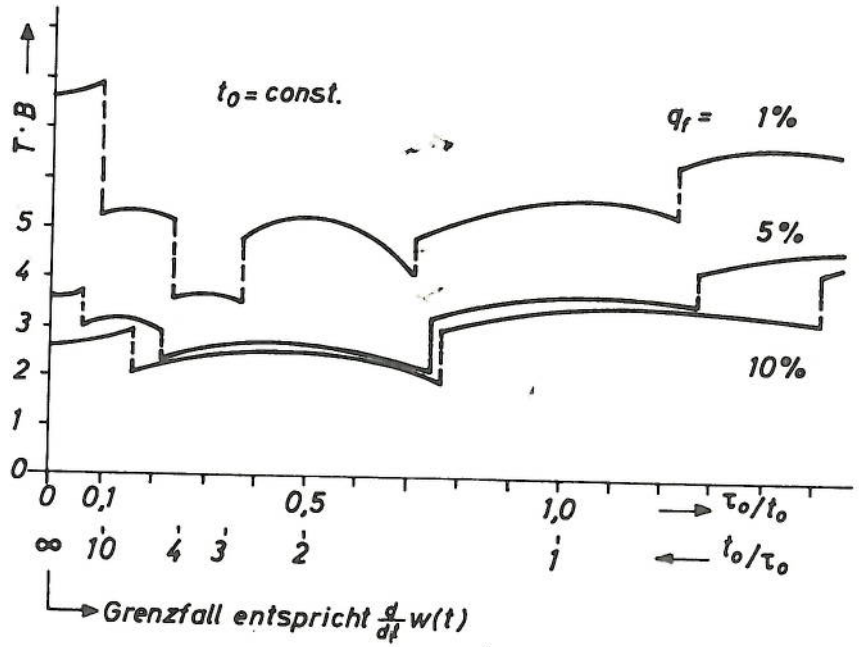


Abb. 43: Zeit-Bandbreite-Produkt T·B als Funktion der Belegungsdichte

Derartige gleichanteilfreie Signalfunktionen können als charakteristische Zeitfunktionen von Bandpaßfiltern aufgefaßt werden. In Anlehnung an den englischen Sprachgebrauch (passband-waveforms, bandpass-signals [2]) kann die Bezeichnung Bandpaß-Signale benutzt werden.

Für die Synthese von Bandpaß-Signalen öffnen sich zwei Wege:

1. Die bisher abgeleiteten Strukturfunktionen werden mit entsprechend zeitbeschränkten oder orthogonalen "Wechsel-

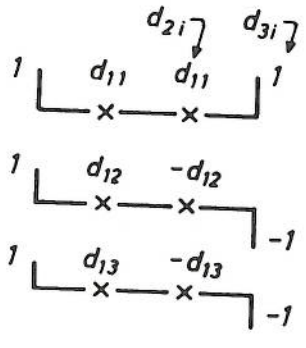
stromimpulsen" (z.B. sin-Impuls) belegt.

2. Es werden Strukturfunktionen abgeleitet, deren Gleichanteil $\sum_{k=0}^{n-1} d_k$ verschwindet.

Der erste Weg ist evident und stellt keine weiteren Ansprüche an die bisher abgeleiteten Alphabete. Dagegen ist die Forderung nach gleichanteilfreien Strukturfunktionalphabeten eine neu zu lösende Aufgabe:

Die allgemeine Lösungsmethode ergänzt den Ansatz für ein Alphabet mit Orthogonalitäts- und Kreuzproduktgleichungen um die Bedingung $\sum_{k=0}^{n-1} d_{ki} = 0$ für alle Funktionen. Die bewährte Methode, nur symmetrische und schiefsymmetrische Funktionen anzusetzen, hat für das vorliegende Problem den zusätzlichen Vorteil, daß schiefsymmetrische Strukturfunktionen in jedem Fall gleichanteilfrei sind. Die Synthese z.B. des Alphabetes $(3,2)_g$ ist damit sehr einfach:

Ansatz:



Orth.:

$2+2d_{12}\,d_{13}=0$

K_1:

$2d_{12}+2d_{13}+2d_{12}\,d_{13}=0$

Gleichanteil:

$2+2d_{11}=0$

Die Lösung lautet:

$1_i\ -1_i\ -1_i\ 1$

$1_i\ 0{,}62_i\ -0{,}62_i\ 1$

$1_i\ -1{,}62_i\ 1{,}62_i\ -1$

$\left(1{,}62\cdots=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

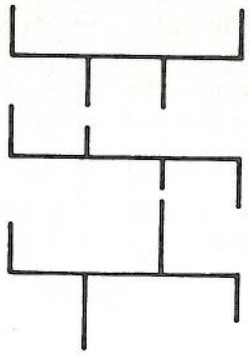


Abb. 44: Alphabet $(3,2)_g$

Als weiteres Beispiel sei noch, ohne Rechengang, das Alphabet $(4,2)_g$ angegeben:

$1_i\ -2{,}116_i\ 2{,}33_i\ -2{,}116_i\ 1$

$\left(2{,}116\cdots=\frac{12+\sqrt{84}}{10}\right)$ etc.

$1_i\ -0{,}284_i\ -1{,}43_i\ -0{,}284_i\ 1$

$1_i\ 1_i\ 0_i\ -1_i\ -1$

$1_i\ -1_i\ 0_i\ 1_i\ -1$

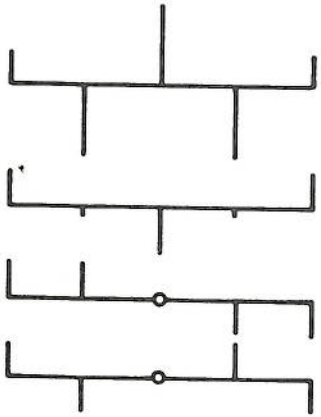


Abb. 45: Alphabet $(4,2)_g$

Das beschriebene Verfahren ist allgemein und läßt sich beliebig fortführen. Leider steigt der Rechenaufwand mit wachsender Komplexität der Alphabete wegen der zusätzlichen Be-

dingung hier noch stärker als bei der vorher behandelten Aufgabe an. Es sollen daher zwei weitere Syntheseverfahren angegeben werden, die es gestatten, aus den schon vorhandenen Alphabeten solche mit Bandpaß-Charakter sehr einfach abzuleiten. Bezüglich der direkt abgeleiteten Alphabete ergeben sich allerdings nur redundante Lösungen.

1. Die Bedingung $\sum_{k=0}^{n-1} d_{ki} = 0$ kann als Orthogonalität zu einer unipolaren Strukturfunktion der Form $d_k = 1$ (für alle k) aufgefaßt werden. Derartig beschaffene Strukturfunktionen sind in den Alphabeten des Typs $(m,1)_{11\ldots}$ (Abb. 33) und $(m,2)_{11\ldots r}$ (Abb. 39) enthalten. Mit anderen Worten: streicht man beispielsweise im Alphabet $(4,1)_1$ (Abb. 33) die erste Funktion ⊔⊔⊔ , dann bilden die restlichen $m - 1 = 3$ Funktionen das gleichanteilfreie, redundante Alphabet $(3,1)_{1gr}$.

   In gleicher Weise erhält man die Alphabete

   $(7,1)_{11gr}$ aus $(8,1)_{11}$

   $(15,1)_{111gr}$ aus $(16,1)_{111}$

   und die gedehnten Alphabete

   $(3,2)_{1gr}$ aus $(4,2)_{1r}$

   $(7,2)_{11gr}$ aus $(8,2)_{11r}$

2. Redundante Alphabete mit Bandpaß-Charakter lassen sich aus beliebigen Alphabeten durch Falten mit der Strukturfunktion $\sigma(t) = \delta(t) - \delta(t - \beta\tau_0)$ ableiten. Die Wahl des Faktors β richtet sich nach der optimalen Belegungsdichte. Wählt man z.B. $\beta = 1/2$, dann entsteht durch Faltung aus dem Alphabet (3,2) das Bandpaß-Alphabet $(3,3)_{rg}$, siehe Abb. 46 .

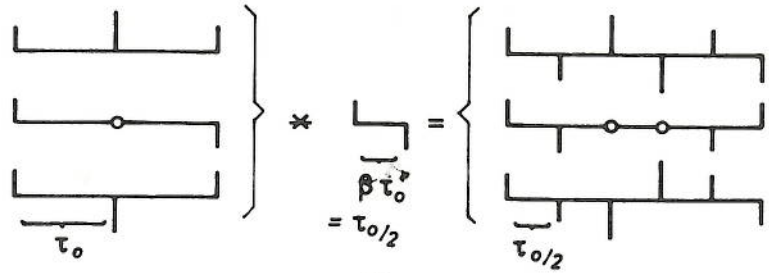


Abb. 46: Entstehung des Alphabets $(3,3)_{rg}$

Dieses Alphabet hat die günstige Belegungsdichte $t_0/\tau_0 = 3$. Die Oszillogramme des durch Belegen mit Formimpulsen gebildeten zugehörigen Signalalphabets zeigt Abb. 47.

Als letztes Beispiel ist in Abb. 48 das für $\beta = 2/3$ aus (3,2) entstehende Alphabet $(3,4)_{rg}$ dargestellt, die Beispiele lassen sich auch hier beliebig fortführen:

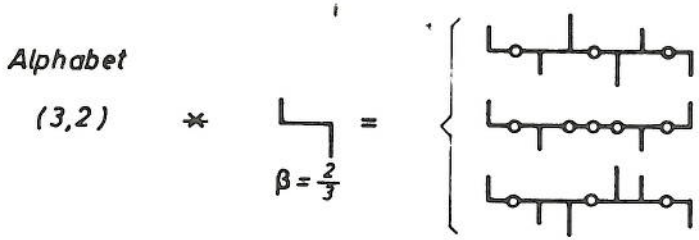


Abb. 48: Entstehung des Alphabets $(3,4)_{rg}$

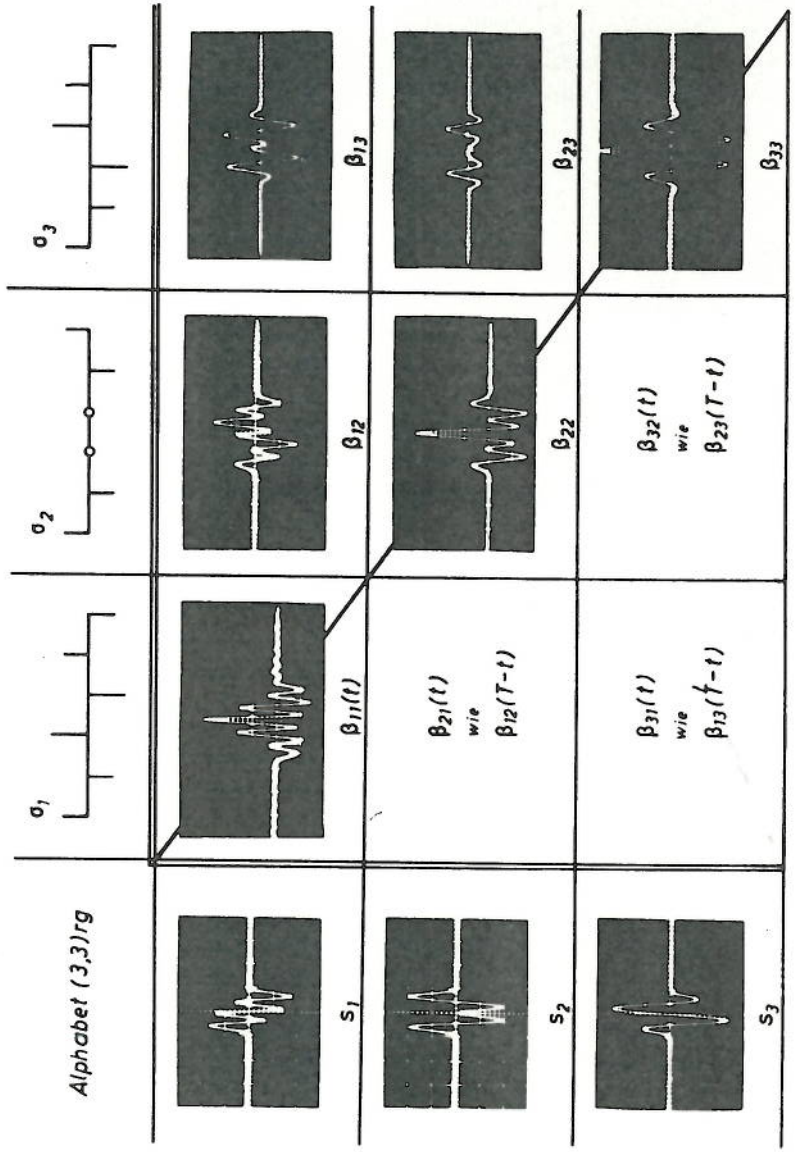


Abb. 47: Alphabet (3,3)rg

3.4 Abgeschlossenheit und Normierung

3.41 Zur Abgeschlossenheit der Alphabete

Ein orthogonales Funktionssystem gilt im mathematischen Sinn als abgeschlossen, wenn keine stetige Funktion existiert (Nullfunktionen ausgeschlossen), die zu allen Funktionen des Systems orthogonal ist.

Übertragen auf das vorliegende Problem darf ein Alphabet als abgeschlossen gelten, wenn keine zusätzliche, reelle Strukturfunktion existiert, die alle für das betreffende Alphabet charakteristischen Bedingungen erfüllt. Der Beweis kann so geführt werden, daß zu dem Alphabet des Umfangs m eine (m+1)-te Funktion gleicher Länge und der Form $(1; d_{1,m+1}; d_{2,m+1} \ldots)$ angesetzt wird. Diese Funktion ist willkürlich auf einen Wert $d_{o,m+1} \neq 0$ normiert, um die Nullfunktion auszuschließen, die Orthogonalität und Kreuzproduktbedingungen immer trivial erfüllt.

Das Alphabet gilt jetzt als abgeschlossen, wenn das System der notwendigen und unabhängigen Bedingungen, welche unter Berücksichtigung aller Symmetriebeziehungen die (m+1)-te Funktion erfüllen muß, entweder gar keine oder keine reelle Lösung hat.

Die nicht redundanten Alphabete sind stets abgeschlossen, da in den Lösungsansätzen dieser Klasse die Zahl der Freiheitsgrade (Unbekannten) der Zahl der notwendigen unabhängigen Bedingungen gleichgesetzt wurde: $n = n_{min}$. Für eine zusätzlich (m+1)-te Funktion ist also im Vergleich mit der m-ten Funktion die Zahl der Bedingungen gestiegen, die Zahl der Freiheitsgrade aber gleich geblieben und folglich für eine Lösung nicht mehr ausreichend.

Über die Abgeschlossenheit der redundanten Alphabete kann keine allgemeine Aussage gemacht werden, die Untersuchung muß für jedes Alphabet einzeln durchgeführt werden.

3.42 Normierung der Alphabete

In 1.44 war gezeigt worden, daß ein orthogonales Alphabet den Nachrichtenraum optimal ausnutzt, wenn seine Signalvektoren auf der Oberfläche einer Überkugel enden, d.h. wenn $|b_{jj}|$ = const ist. Nach der Parsevalschen Gleichung $b_{jj}^2 = E_j$ haben dann alle Funktionen eines Alphabets den gleichen Energieinhalt.

Zur Vereinfachung der Rechnung wurden bisher alle Strukturfunktionen σ_j eines Alphabets unabhängig voneinander auf $d_{oj} = 1$ normiert. Als Folge davon sind die Signalvektoren der zugehörigen Signalfunktionen verschieden groß. Zur Normierung der Alphabete auf $|b_{jj}|$ = const müssen die einzelnen Funktionen mit Normierungsfaktoren multipliziert werden. Falls nicht die bequeme meßtechnische Normierung vorgezogen wird, ist es vorteilhaft, zunächst die Strukturfunktionen zu normieren und dann den Einfluß der Bewertungsfunktion durch Korrekturfaktoren zu berücksichtigen.

Für Strukturfunktionen gilt

$$b_{jj} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j(t)\sigma_j(t)\,dt = \sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}^2 \qquad (3/12)$$

Als Beispiel zeigt Abb. 49 die Strukturfunktionen des Alphabets (3,2) mit ihren Korrelationsfunktionen; in der unteren Zeile sind die sich ergebenden Werte für b_{jj} eingetragen.

Alphabet (3,2)	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1 $1;\sqrt{2}$	$1;2\sqrt{2};\underline{4}$	$-1;-\sqrt{2};0$	$1;0;0$
σ_2 $1;0$	—	$-1;0;\underline{2}$	$1;-\sqrt{2};0$
σ_3 $1;-\sqrt{2}$	—	—	$1;-2\sqrt{2};\underline{4}$
b_{jj}	$b_{11}=4$	$b_{22}=2$	$b_{33}=4$

Abb. 49: Alphabet (3,2) mit Korrelationsfunktionen

Soll auf $|b_{jj}| = 1$ normiert werden, dann sind also die Strukturfunktionen σ_j durch $+\sqrt{\sum_{k=o}^{n-1} d_{kj}^2}$ zu dividieren. Zu normalerweise etwas handlicheren Werten führt die Normierung auf die erste Funktion eines Alphabetes: $b_{jj} = b_{11}$. Als Normierungsfaktoren in diesem Sinn ergeben sich beispielsweise für die ersten drei Alphabete (m,2):

Alphabet:		(3,2)	(4,2)	(5,2)
Normierungs-faktoren für :	σ_1	1	1	1
	σ_2	$+\sqrt{2}$	1,62	1
	σ_3	1	1,62	2
	σ_4	-	1	$+\sqrt{3}$
	σ_5	-	-	$+\sqrt{3}$

Die Faltung der normierten Strukturfunktionen mit der Bewertungsfunktion führt erst nach einer weiteren Korrektur auf normierte Signalfunktionen. In Abb. 50 wird gezeigt, wie sich die Korrelationsfunktionen der Signale als Summen zeitlich gegeneinander versetzter Funktionen der Form $w(t) * w(t)$ darstellen lassen.

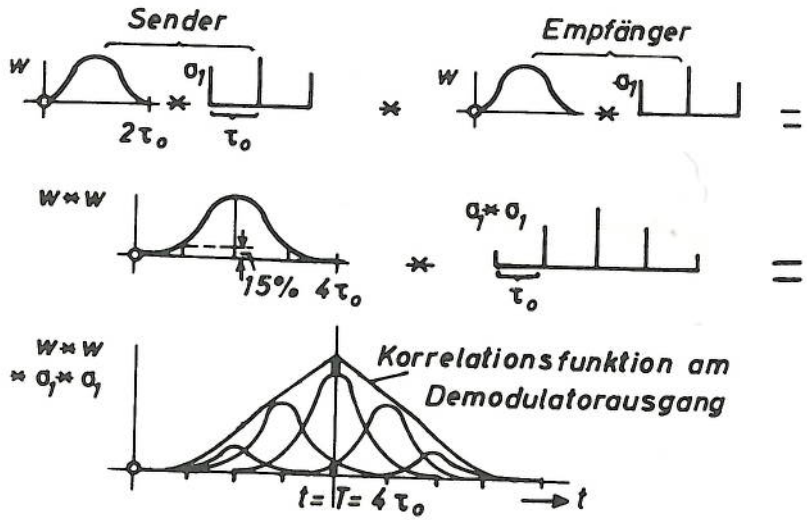
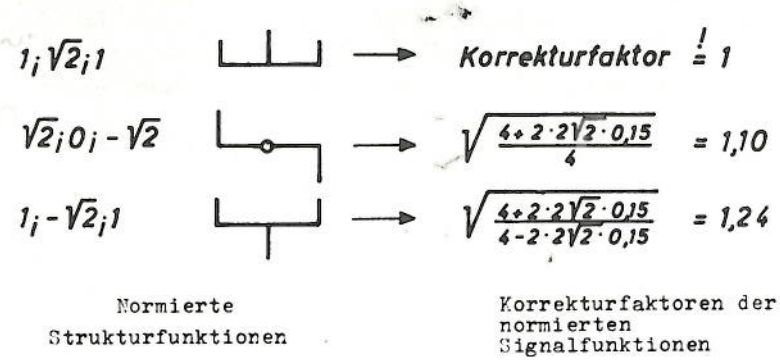


Abb. 50: Konstruktion der Korrelationsfunktionen am Beispiel der Funktion σ_1 des Alphabetes (3,2)

Der zur Zeit t = T abgetastete Wert wird durch die Überlappung dieser Funktionen verändert.
Im betrachteten Beispiel ist die Korrelationsfunktion $w * w$ des benutzten Formimpulses im Abstand $\tau_0 = t_{0/2}$ vom Maximum auf den 0,15fachen Wert gefallen. Die zusätzlichen Korrekturfaktoren des Alphabets (3,2) errechnen sich dann in folgender Weise:



4. Vergleichende Untersuchungen an den Orthogonalalphabeten

4.1 Nutzungsfaktoren der Alphabete

Bei einem Vergleich der gefundenen Alphabete stellt sich zunächst die Frage, wie groß der Nachrichtenfluß ist, den man in einem idealen, ungestörten Kanal gegebener Bandbreite erreichen kann. Werden alle Signale eines Alphabets der Umfangs m gleichhäufig übertragen, dann beträgt der Nachrichtenfluß (vgl. 1.13)

$$I = \frac{\mathrm{ld}\, m}{T} \qquad (4/1)$$

Entspricht die Dauer einer Signalfunktion gerade einer Taktperiode T, so gilt

$$T = t_{Signal} = (n-1)\tau_o + t_o \qquad (4/2)$$

für ein maximal dicht belegten Alphabet (m,q^+) ist weiter

$$\tau_o = \frac{t_o}{q^+} \qquad (4/3)$$

Setzt man (4/2) und (4/3) in (4/1) ein, so ergibt sich

$$I = \frac{ld\ m}{t_o(\frac{n-1}{q^+} + 1)} \qquad (4/4)$$

Um einen von den Kanaleigenschaften unabhängigen Vergleich der Alphabete zu ermöglichen, wird der auf $1/t_o$ bezogene Nachrichtenfluß als Nutzungsfaktor N eingeführt, es gilt

$$N = I\ t_o = \frac{q^+\ ld\ m}{q^+ + n - 1} \qquad (4/5)$$

Diese Größe ist nur noch vom Aufbau der Strukturfunktionen abhängig und ermöglicht einen einfachen Vergleich der Alphabete hinsichtlich des maximal erreichbaren Nachrichtenflusses.
Der wirkliche Nachrichtenfluß ergibt sich aus dem Nutzungsfaktor zu

$$I = \frac{N}{t_o} \qquad (4/6)$$

Beispiel: Übertragung in einem Kanal der Bandbreite 3 kHz; t_o ist angenähert der Quotient des TB-Produktes der Bewertungsfunktion und der Bandbreite:

$$t_o = \frac{(TB)_w}{B} = \frac{1,93}{3\ kHz} = 645\ \mu s \qquad \text{(Formfilter 52.10.D)}$$

also ist der Nachrichtenfluß

$$I = \frac{N}{t_o} = N \cdot 1550\ bit/sec \qquad (4/7)$$

In dieser Rechnung ist der Einfluß der Belegungsdichte auf die Bandbreite der Signalfunktionen unberücksichtigt geblieben, eine Vernachlässigung, die nach der Untersuchung in 3.33 für Belegungsdichten $t_o/\tau_o \triangleq q^+ \leq 3$ zulässig ist.

Im Diagramm Abb. 51 sind die Nutzungsfaktoren sämtlicher Alphabete über dem Umfang m aufgetragen. Die den einzelnen Alphabeten zugeordneten Punkte sind durch Kurven verbunden, die sich bei stetiger Änderung der Variablen m in Gleichung (4/5) ergeben. Man erkennt, daß der Nutzungsfaktor für jede Familie von Alphabeten ein Maximum durchläuft. Beispielsweise erhält man für die Familie (m,2) mit $q^+ = 2$ und $n = m$:

$$N_{(m,2)} = 2 \cdot \frac{ld\ m}{m + 1},$$

der Extremwert dieser Funktion liegt bei $m_{max} \approx 3,55$.

Es treten noch zwei weitere Funktionstypen auf:

$$N \sim \frac{ld\ m}{m} \quad \text{mit dem Extremwert } m_{max} = e$$

und

$$N \sim \frac{ld\ m}{m + 2} \quad \text{mit } m_{max} \approx 4,30\ .$$

Das Diagramm zeigt weiter, daß redundante und gleichanteilfreie Alphabete geringere Nutzungsfaktoren erreichen.

Zur Veranschaulichung ist die Ordinate zusätzlich in bit/sec beziffert (Nachrichtenfluß im 3 kHz-Kanal) und zwar einmal nach Formel (4/7), zum zweiten für ternäre (m = 3) Alphabete unter der Annahme, daß deren Umfang durch Hinzunahme der negativen Signalfunktionen (im Sinne von 1.44) verdoppelt wird. Der Nachrichtenfluß erhöht sich durch diese Verdopplung um den Faktor $\frac{ld\ 2\ m}{ld\ m} = \frac{1 + ld\ 3}{ld\ 3} = 1,63$ und erreicht für das Alphabet (3,2) etwa 2000 bit/sec.

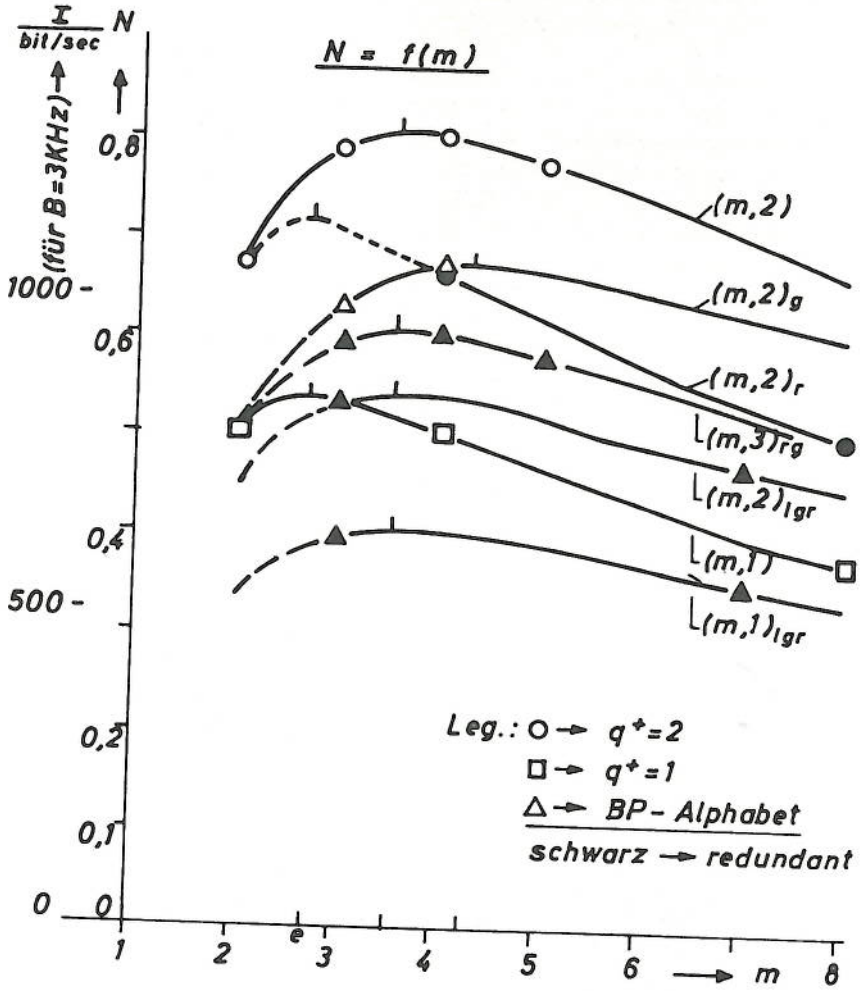


Abb. 51: Nutzungsfaktoren der Alphabete

4.2 Beeinflussung der Übertragung durch additive Störsignale

4.21 Meßverfahren

In 1.42 war bereits auf die Möglichkeit hingewiesen worden, die oszillographische Darstellung des Empfangsprozesses im Nachrichtenraum als analoges Meßverfahren zu verwenden. Untersucht werden soll insbesondere die Frage, in welchem Maße die Störanfälligkeit einer Übertragung durch Verwendung umfangreicherer Alphabete vermindert wird. Für die Messungen wurde eine Schaltung nach Abb. 52 aufgebaut; sie besteht im wesentlichen aus zwei einstellbaren Verzögerungskettenfiltern für Erzeugung und Empfang der Signalfunktionen im Frequenzbereich 0 ... 4 kHz. Die Abtastung zur Zeit t = T am Ausgang der Empfangsfilter geschieht durch Helltastung des Oszillographen. Die Nachbildung des Übertragungskanals enthält einen Addierverstärker für Störspannungen, sie kann durch Filter etc. ergänzt werden.

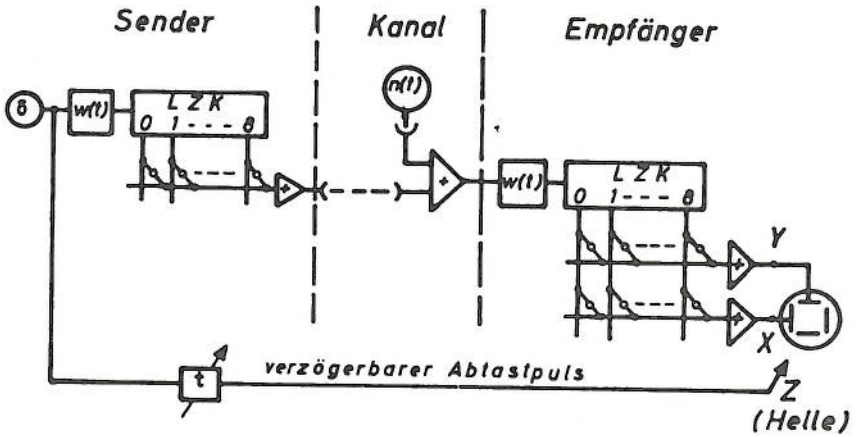


Abb. 52: Schaltung zur Darstellung im Nachrichtenraum

Zur Messung der Störanfälligkeit werden idealisierte Störsignale addiert und deren Streubereiche im Nachrichtenraum ausgewertet. Um einen Vergleich der Meßergebnisse an verschiedenen Alphabeten zu ermöglichen, soll das Amplitudenspektrum der Störspannungen im Frequenzbereich eines Signalalphabets konstant sein. Signale, die diese Bedingung erfüllen und gleichzeitig in etwa die Grenzen abstecken, zwischen denen sich reale Störspannungen bewegen [41], sind kurze Rechteckimpulse und weißes Gauß'sches Rauschen.
Beispiele von Streuräumen des Alphabets (3,2), die diesen Störtypen zugeordnet sind, wurden bereits in den Oszillogrammen der Abb. 10 gezeigt.
Zur Auswertung derartiger Oszillogramme bedient man sich zweckmäßigerweise einer transparenten Schablone mit je zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden zur Darstellung absoluter und relativer Entscheidungsschwellen. Diese Geraden werden entsprechend den Abbildungen in 1.43 über den Streubereichen verschoben und gestatten für jedes beliebige Signal-Störverhältnis die Bestimmung des Verhältnisses der korrekten zu den Fehlentscheidungen. Die Auswertung der Streuräume der Alphabete (m,2) führte auf die in den folgenden Abschnitten behandelten Ergebnisse.

4.22 Impulsförmige Störungen

Nachzutragen ist zunächst, daß der in Abb. 10 rechts dargestellte Streubereich durch Addition einer Folge kurzer Rechteckimpulse konstanter Amplitude entsteht, wobei die Phasenlage eines Einzelimpulses bezüglich der Signalfunktion stufenweise über eine Taktperiode variiert wird. Die Auswertung eines solchen Streubereiches gestattet also eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit kurze Einzelimpulse bestimmten Energieinhalts, aber stochastisch gleichverteilter Phase, Fehler bewirken. Die Ergebnisse der Auswertung für das Alphabet (3,2) sind in Abb. 53 bei absoluter und bei relativer Entscheidungsschwelle dargestellt. Der Energieinhalt pro Störimpuls kann über einen Tiefpaß

mit der Grenzfrequenz der Signalfunktionen gemessen und, auf die Signalenergie einer Taktperiode bezogen, in dB angegeben werden.

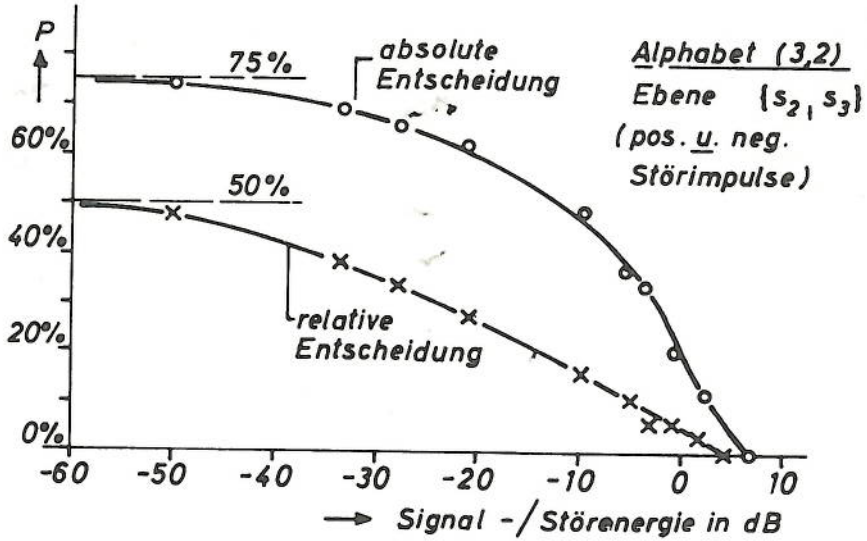


Abb. 53: Fehlerwahrscheinlichkeit für impulsförmige Störungen (nach Auswertung im Nachrichtenraum)

Für sehr große Stör-/Signalenergieverhältnisse nähern sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten festen Grenzwerten. Bei 'relativer' Entscheidung führen beliebig hohe, gleichverteilte Störvektoren in zwei von vier Quadranten zu Fehlentscheidungen, bei 'absoluter' Entscheidung in drei von vier Quadranten. Entsprechend liegen die Grenzwerte bei 50 % bzw. 75 % (vgl. Abb. 53).

Als besonders charakteristischer Kurvenpunkt kann P = 0 gelten, das zugehörige Signal-Störverhältnis ist gerade so hoch,

daß auch bei der ungünstigsten Phasenlage kein Fehler mehr auftritt. Dieser charakteristische Störabstand gestattet einen anschaulichen Vergleich der Alphabete. In Abb. 54 ist dieses Energieverhältnis von Störimpuls zu Nutzsignal in der jeweils ungünstigsten Ebene des Nachrichtenraumes über den Umfang m der Alphabete aufgetragen. Ergänzt wird die Familie (3,2), (4,2) und (5,2) durch das mit gleicher Belegungsdichte bewertete Paar ⊔, ⊔ entsprechend einem Alphabet (2,2) .

Für die Messung mit absoluter Entscheidung kann außerdem der Empfang der Bewertungsfunktion allein (also m = 1) mit aufgenommen werden.

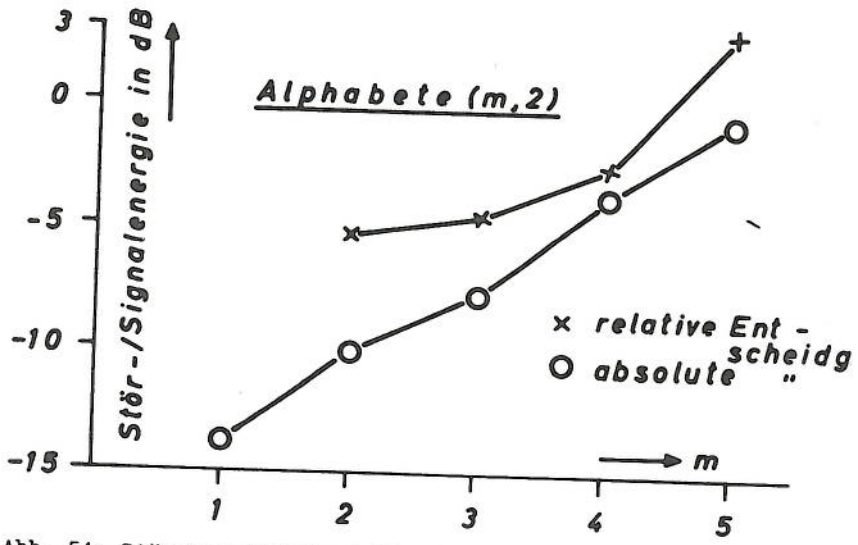


Abb. 54: Stör-Signalabstand für fehlerfreien Empfang bei impulsförmigen Störungen

Die Meßergebnisse zeigen einmal den mit dem Umfang der Alphabete wachsenden Gewinn an Störabstand und zum zweiten die Überlegenheit der 'relativen' Entscheidung.

4.23 Störungen durch Rauschen

Die Auswertung der durch addiertes weißes Rauschen erzeugten Streubereiche (vgl. Abb. 10 links) ist in gleicher Weise möglich, wie für impulsförmige Störungen beschrieben. Leider ist die Auszählung der Fehlentscheidungen ungenauer, da die endliche Nachleuchtdauer des Oszillographenschirms nicht die Ausblendung einer definierten Zeit mit einer entsprechend definierten Anzahl gleichheller Signalpunkte erlaubt.

In Abb. 55 ist der für eine Fehlerhäufigkeit ≤ 5 % notwendige Störabstand bei relativer und absoluter Entscheidung wieder über dem Umfang m für die Alphabete (m,2) aufgetragen.

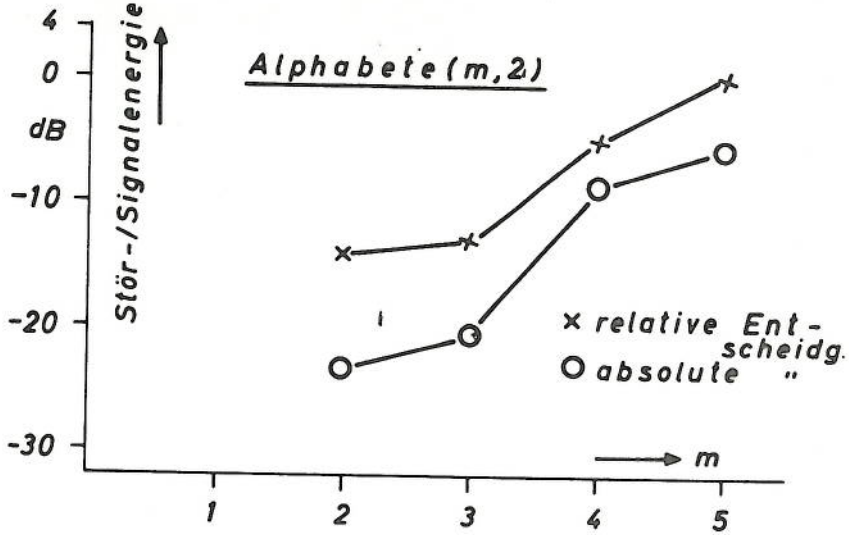


Abb. 55: Stör-Signalabstand für den Empfang durch Rauschen gestörter Signale für eine Fehlerhäufigkeit ≤ 5 %

Trotz der recht unscharfen Auswertemöglichkeit läßt Abb. 55 die gleichen Tendenzen wie Abb. 54 gut erkennen.

4.23 Übertragungsversuch über eine Fernsprechleitungsschleife

Nach Betrachtung der Streubereiche idealisierter Störsignale sei abschließend kurz auf die Verhältnisse bei der Übertragung über eine reale Fernsprechleitungsschleife eingegangen.

Gesendet wurde die Signalfunktion $s_3(t)$ des mit einem Formimpuls 52.10:D (t_o = 500 µs) belegten Bandpaß-Alphabets $(3,2)_g$. Der Sendepegel betrug - 6 dB_{mo} , die Taktzeit T = 2,5 ms.

Die Abb. 56 bis 58 zeigen die Sendefunktion, das am Ausgang einer 6 km langen Leitungsschleife (über zwei Vermittlungsämter) empfangene Signal (hinter einem Bandpaß 300 ... 3400 Hz) und die Korrelationsfunktion am Ausgang des zugeordneten Empfangsfilters. Zwei Beispiele der oszillographierten Streubereiche in der Ebene $\{s_3, s_2\}$ des Nachrichtenraums sind in den folgenden Abb. 59 und 60 dargestellt. Es zeigt sich, daß während der 10 bzw. 8 Minuten betragenden Meßzeit die gestörten Empfangspunkte überwiegend in der Richtung zum Ursprung hin orientiert waren, d.h. die Störungen sind im wesentlichen durch kurzzeitige Pegeleinbrüche bedingt. Vorzuziehen wäre hier also eine Entscheidungsstufe mit relativen Schwellen.

4.3 Einfluß von Synchronisationsfehlern

Wesentlich für die Güte des Matched Filter-Empfangs ist die zeitgenaue Abtastung der Demodulatorausgänge. Abb. 61 zeigt den Empfang der Signalfunktion s_3 des Alphabets (3,2) in der Ebene $\{s_3, s_2\}$ des Nachrichtenraums bei äquidistanter Abtastung an 4 Stellen der Taktperiode. Dem Oszillogramm läßt sich nach Eintragung der relativen bzw. absoluten Entscheidungsschwellen entnehmen, bei welchem maximalen Abtastfehler noch keine Fehlentscheidung getroffen wird. Die Meßergebnisse an einer Anzahl von Alphabeten verschiedenen Umfangs sind im Diagramm der Abb. 62 aufgetragen (jeweils in der ungünstigsten Kombination gemessen). Trägt man den maximal zulässigen Abtastfehler reziprok auf, so zeigt sich, daß die notwendi-

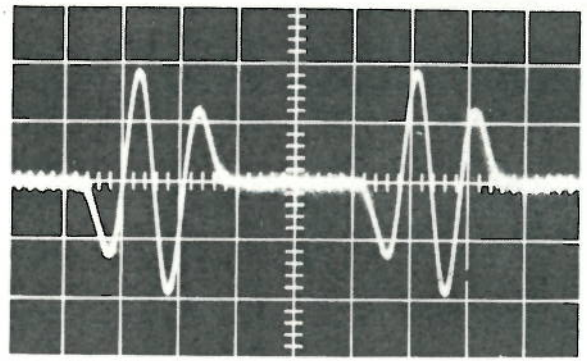


Abb. 56: Signal am Eingang der Übertragungsstrecke (Funktion s_3 des Alphabets $(3,2)_g$)

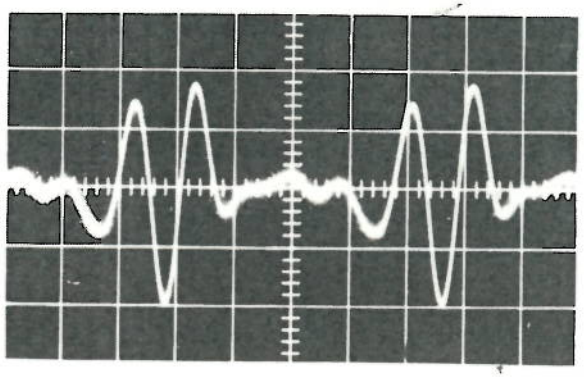


Abb. 57: Signal am Ausgang der Übertragungsstrecke (Hinter CCITT-Bandpaß)

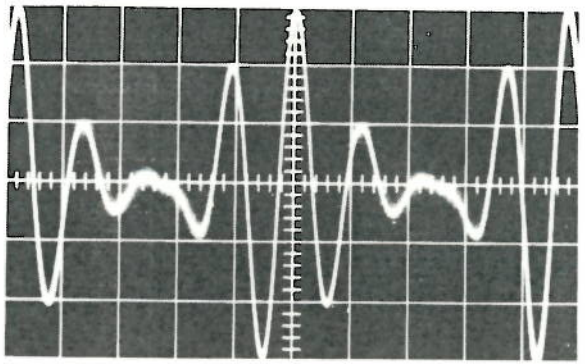


Abb. 58: Korrelationsfunktion $\beta_{33}(t)$ am Demodulatorausgang

Abb. 59:
Streuung des Signalpunktes S_3 in der Ebene $\{s_2; s_3\}$
Übertragungszeit 10^{min}
Tageszeit $14^h - 15^h$

Abb. 60:
wie Abb. 59,
Übertragungszeit 8^{min}
Tageszeit $14^h - 15^h$

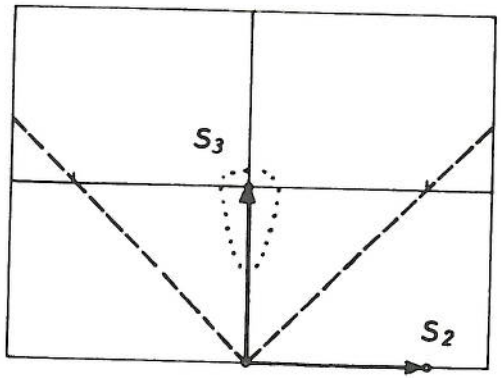


Abb. 61:
Lage des Nachrichtenraumes in den Oszillogrammen Abb. 59 und 60
(- - - relative Entscheidungsschwellen)

ge relative Abtastgenauigkeit etwa linear mit dem Umfang der Alphabete ansteigt.

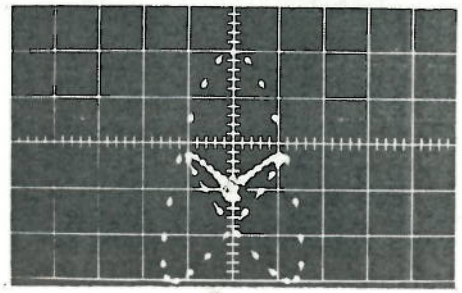


Abb. 61: Der Einfluß von Abtastfehlern

Andererseits ist die erforderliche absolute Abtastgenauigkeit in etwa vom Umfang der Alphabete unabhängig (gleiche Bandbreite vorausgesetzt).

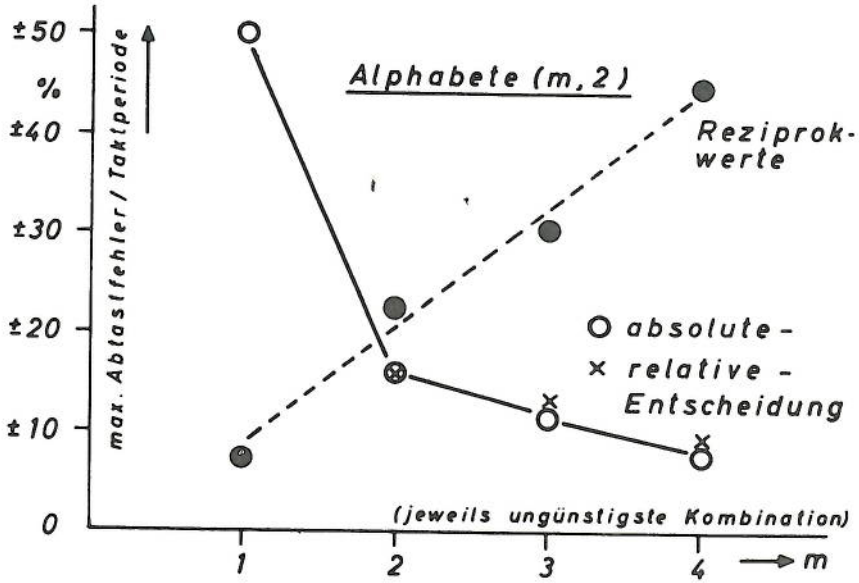


Abb. 62: max. zulässiger Abtastfehler verschiedener Alphabete

4.4 Modell eines drei-dimensionalen Nachrichtenraums

An den Schluß sei in Abb. 63 das Modell eines dreidimensionalen Nachrichtenraumes gestellt. Es zeigt den Empfang der Signalfunktionen des Alphabets (3,2) überlagert von pulsförmigen Störungen konstanter Amplitude (beider Polarität) mit gleichverteilter Anfangsphase.

Die Entscheidung geschieht durch Relativvergleich, angedeutet durch die drei Trennflächen zwischen den Signalvektoren.

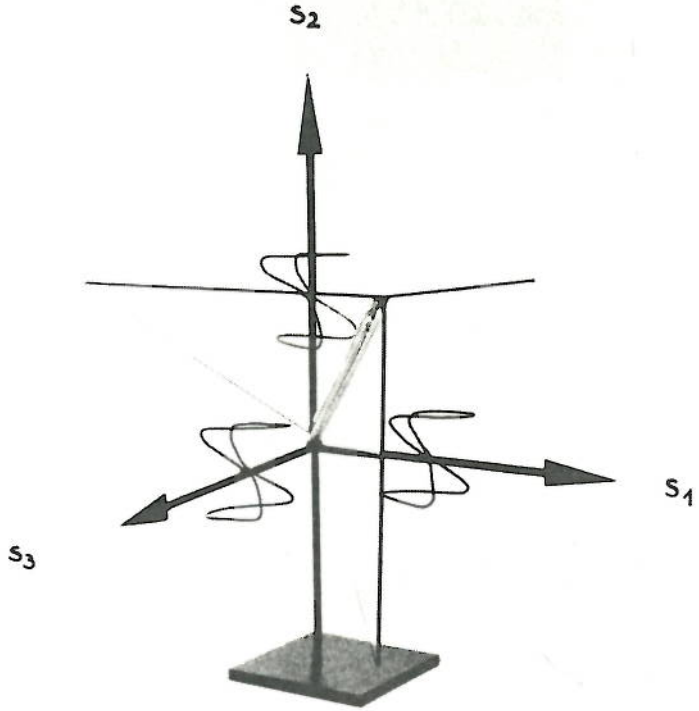


Abb. 63: Dreidimensionales Modell des Empfangs im Nachrichtenraum

5. Zusammenfassung

Ein wesentliches Problem jeder Nachrichtenübertragung ist die Elimination der Störeinflüsse, denen die Signale im Übertragungskanal unterworfen sind. Ein Aspekt dieser Aufgabe besteht in der Auswahl geeigneter Signalfunktionen, die eine aus dieser Sicht optimale Anpassung von Nachrichtenquelle und Senke an das gegebene nichtideale Übertragungsmedium ermöglichen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Ableitung von Signalfunktionssystemen, die unter gewissen eingrenzenden Bedingungen zur Lösung dieses Anpassungsproblems geeignet scheinen. Vorausgesetzt ist dabei eine digitale Übertragung auf Kanälen mit zeitlich invarianten Übertragungsfaktoren (z.B. Datenübertragung auf drahtgebundenen Fernsprechkanälen).

Nach einer Beschränkung auf linear unabhängige Signalalphabete zeigt die Analyse des Empfangsvorgangs die Vorteile orthogonaler Signalfunktionen. Die Prinzipien der Korrelations- und Matched Filter-Demodulation werden beschrieben. Anschließend wird der vollständige Empfangsvorgang additiv gestörter Signale an Hand einer anschaulichen geometrischen Darstellung im Nachrichtenraum betrachtet. Als Abschluß des ersten Teils werden die resultierenden Forderungen an optimale Signalfunktionssysteme zusammengestellt.

Der zweite Teil beschreibt bekannte Orthogonalsysteme und vergleicht ihre Eigenschaften mit den aufgestellten Forderungen. Am Analogrechner wird die Nachrichtenübertragung mit Hilfe eines Systems Laguerrescher Funktionen demonstriert.

Der dritte Teil befaßt sich mit der Synthese orthogonaler Signalalphabete, die möglichst gut den gestellten Forderungen genügen sollen. Ausgehend von einer Signaldarstellung durch bewertete Impulsserien werden die zur Orthogonalität notwendigen Bedingungen hergeleitet und führen zu einer Synthese neuartiger Signalfunktionsalphabete. Betrachtungen über Vollständigkeit und Normierung schließen das Kapitel ab.

Im letzten Abschnitt werden die gefundenen Alphabete hinsichtlich ihrer wesentlichen Eigenschaften und Störempfindlichkeit vergleichend diskutiert; hierzu wird eine oszillographische Darstellung des Empfangsvorgangs im Nachrichtenraum benutzt.

Literaturverzeichnis

1	Shannon	A Mathematical Theorie of Communication BSTJ 27 (1948) S. 379
2	Filipowsky	Recent Progress in Applying Information Theorie to Digital Transmission Systems Comm. a. Electr. 35 (1958) S. 848
3	Arthurs, Dym	On the Optimum Detection of Digital Signals - - - IRE-Trans. on CS 10 (1962) S. 336
4	Lerner	Modulation and Signal Selection for Digital Data Systems Proc. NEC 16 (1960) S. 2
5	Zadeh	Fundamental Aspects of Linear Multiplexing Proc. IRE 40 (1952) S. 1091
6	Zurmühl	Praktische Mathematik Springer Verlag, Berlin 1953
7	Sansone	Orthogonal Functions Interscience Publishers, New York 1959
8	Filipowsky	Digital Data Systems of the Future IRE-Trans. on CS 9 (1961) S. 88
9	Filipowsky	Integrated Data Systems IRE-Trans. on CS 7 (1959) S. 95
10	Turin	The Asymptotic Behaviour of Ideal M-ary Systems Proc. IRE 47 (1959) S. 93
11	Aaron	The Use of Least Squares in System Design IRE-Trans. on CT 3 (1956) S. 224

12 Glenn — Comparison of PSK vs FSK and PSK-AM vs FSK-AM Binary Coded Transmission Systems
IRE-Trans. on CS 8 (1960) S. 87

13 Marchand — Analysis of Multiplexing and Signal Detection by Function Theorie
IRE Conv. Rec. 1953 pt. 8

14 Mc Auliffe — Impulsing of Linear Networks in Integrated Data Systems
IRE-Trans. on CS 7 (1959) S. 189

15 Zadeh — Optimum Filters for the Detection of Signals in Noise
Proc. IRE 40 (1952) S. 1223

16 Muehldorf, Hatcher, Mc Auliffe — The Auto and Cross Correlation Functions of Elementary Waveforms
Proc. Nat. Aeronautical Electronics Conf. 1959 S. 232

17 Furduyev — Some Basic Concepts of Signal Theorie
Radiotekhnica (Radio Engineering) 12 (1957) Nr. 4 S. 32

18 Turin — An Introduction to Matched Filters
Trans. IRE on IT 6 (1960) S. 311

19 Meschkowski — Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik
Bibliogr. Inst., Mannheim 1963

20 Rall — Elektronische Extremwertbestimmung
Telefunken Zeitung 35 (1962) S. 52

21 Bloom — Improvement of Binary Transmission by Null-Zone Reception
Proc. IRE 45 (1957) S. 963

22 Schwartz — Some Recent Developments in Digital Feedback Comm. Systems
IRE Trans. on CS 9 (1961) S. 51

23 Hammond, Johnson — A Review of Orthogonal Squarewave Functions - - -
Journ. Franklin Inst. 273 (1962) S. 211

24 Armstrong — On Finding an Orthonormal Basis for Representing Transients
IRE Trans. on CT 4 (1957) S. 286

25 Ku, Drubin — Network Synthesis Using Legendre and Hermite Polynomials
Journ.Franklin Inst.273 (1962) S. 138

26 Leontiew — On the Possibility of Utilizing the System of Orthogonal Functions for Communication Purposes
Elektroswjas 12 (1958) S. 3 (Telecommunications)

27 Rihaczek — Die Verzerrung von Signalen in Hochfrequenzkabeln
NTZ 14 (1961) S. 119

28 Huggins — Signal Theorie
IRE Trans. on CT 3 (1956) S. 210

29 Ross — Orthonormal Exponentials
Proc. NEC 18 (1962) S. 838

30 Harmuth — On the Transmission of Information by Orthogonal Time Functions
Trans. AIEE pt I (Comm. a. Electr.) 49 (1960) S. 248
auch AEÜ 17 (1963) S. 429

31 Filipowsky — Comparison of Modulation Systems for Digital Transmission
3rd annual Aeronautical Comm.Sympos.
Utica N.Y. Nov. 1957

32 Hüttmann — Moderne Breitbandsignal-Verfahren für mehrdeutige Übertragungswege
Nachrichtentechnik 13 (1963) S. 153

33 Tricomi — Vorlesungen über Orthogonalreihen
Springer Verlag, Berlin 1955

34 Schüßler — Schaltung und Messung von Übertragungsfunktionen an einem Analogrechner
AEÜ 13 (1959) S. 405

35 Kettel — Übertragungssysteme mit idealer Pulsfunktion
AEÜ 15 (1961) S. 207

36 Schüßler — Über das Abtasttheorem - - -
Dissertation, T.H. Aachen 1958

37 Dobesch, Sulanke — Zeitfunktionen
VEB Verlag Technik, Berlin 1962

38 Herrmann, Schüßler — Zur Auswahl von Filtern mit günstigem Einschwingverhalten
AEÜ 14 (1960) S. 183

39 Jess, Schüßler — Über Filter mit günstigem Einschwingverhalten
AEÜ 16 (1962) S. 117

40 Gilbert — A Comparison of Signalling Alphabets
BSTJ 31 (1952) S. 504

41 Nadenau — Typische Störspannungen in Fernsprechvermittlungsstellen
NTZ 15 (1962) S. 236

42 Zygmund — Trigonometrical Series
Dover Publ., New York 1955

43 Herschel — Analogrechenschaltungen für die Entwicklungskoeffizienten nach Orthogonalfunktionen
Elektron. Rechenanlagen 3 (1961) S.212

25. Nov. 1975 05. Nov. 1976
11. Juni 1979

Lebenslauf

7. April 1935	geboren in Bielefeld als Sohn des Kaufmanns Hans Lüke und seiner Ehefrau Maria, geb. Dressen
1941 - 1946	Besuch der Grundschule
1946 - 1955	Besuch des Alten Gymnasiums in Bielefeld und des E.M. Arndt-Gymnasiums in Bonn
März 1955	Reifeprüfung
1955 - 1960	Studium der Elektrotechnik, Fachrichtung Fernmeldetechnik, an der Technischen Hochschule Aachen
September 1960	Diplom-Prüfung
Oktober 1960 - Dezember 1961	wiss. Mitarbeiter am Institut für elektrische Nachrichtentechnik der T.H. Aachen (Prof. Dr.-Ing. V. Aschoff)
seit Januar 1962	wiss. Assistent am selben Institut

- 9. JAN. 1979
04. JAN. 1989 B 20. DEZ. 1989 B

Druck: Gerd Wasmund, Köln - Zweigstelle Aachen, Friesenstraße 13

14. Mai 1975
09. Juli 1975
S69628#E
S69628#E
Bitte Karten nicht herausnehmen